SCRITTO DI FISICA II
per Ingegneria Civile del 20 febbraio 2017

1. Trovare l'energia elettrostatica che spetta a una distribuzione uniforme Q di carica a simmetria sferica di raggio R

2. Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio $R = 1$cm è percorso da una corrente di densità $J = 10^6$A/m^2 uniforme. Calcolare l'energia immagazzinata in un tratto lungo L =20m.

3. All'interno di un solenoide ideale avvolto da "n" spire per unità di lunghezza, è disposta, nel vuoto, una spira quadrata di lato L e resistenza R disposta sul piano ortogonale all'asse del solenoide. Il solenoide è percorso da una corrente variabile nel tempo secondo la legge $I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Trascurando l'autoinduzione ricavare l'espressione dell'energia dissipata dalla spira nell'intervallo di tempo $(0, \infty)$.

4. È dato un disco di raggio R carico superficialmente con densità di carica uniforme σ. Il disco è posto in rotazione in senso antiorario attorno all'asse ortogonale e passante per il centro diretto lungo l'asse z positivo, con velocità angolare ω. Trovare il vettore **B** al centro del disco.

a) Ricavare le caratteristiche elettriche dei conduttori grazie alla legge di Gauss

b) descrivere il modello per il diamagnetismo. Ricavare un'espressione per la suscettività magnetica

SOLUZIONI SCRITTO DI FISICA II
ing civile del 26 gennaio 2017

1)L'energia elettrostatica può essere calcolata dal campo elettrico

$$\int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr$$

Per $r \leq R$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

per $\geq R$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Quindi

$$U_1 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^6}\int_0^R r^4 dr = \frac{1}{5}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$U_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

per cui

$$U = U_1 + U_2 = \frac{3}{20}\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

---

2) L'energia si ricava integrando la densità di energia di volume $u = B^2/(2\mu_0)$ nel cilindro di lunghezza L e volume infinitesimo $d\tau = 2\pi rLdr$. Quindi è necessario conoscere l'andamento di $B(r)$ ricavabile dalla legge di Ampère:

$$2\pi rB(r) = \mu_0\pi r^2 J$$

per cui $B(r) = \mu_0 rJ/2$, infine

$$U = \int ud\tau = \frac{\pi L\mu_0 J^2}{4}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi L\mu_0 J^2 R^4}{16} = 49,3mJ$$

---

3) L'energia dissipata dalla spira è l'integrale nel tempo della potenza dissipata dalla resistenza quindi

$$E = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty RI_{sp}(t)^2 dt$$

la corrente I_{sp} che passa nella spira si ottiene dalla legge di induzione a causa del flusso ϕ_{sp} variabile che la attraversa, dovuto alla corrente variabile del solenoide

$$I_{sp} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_{sp}}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d(\mu_0 nIL^2)}{dt} = -\frac{\mu_0 nI_0L^2}{R\tau}e^{-t/\tau}$$

quindi l'energia dissipata sarà

$$E = R\left(-\frac{\mu_0 nI_0L^2}{R\tau}\right)^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{\mu_0^2 n^2 I_0^2 L^4}{2R\tau}$$

---

4) Il disco che ruota, carico in maniera uniforme, puó essere visto come un insieme di spire elementari di raggio variabile r, di superficie elementare $ds = 2\pi r dr$ quindi di carica elementare $dq = 2\pi r\sigma dr$ che, ruotando alla frequenza di $\nu = \omega/(2\pi)$ volte per unità di tempo, è come se facessero scorrere la corrente elementare $dI = \nu dq = \omega\sigma r dr$. Considerando l'espressione del vettore campo magnetico per una spira di raggio r, al suo centro $B = \mu_0 I/(2r)$ diretto ortogonalmente al piano della spira in modo da vedere la corrente girare in senso antiorario, la spira elementare produrrá un campo magnetico elementare $dB = \mu_0 dI/(2r)$ quindi il campo magnetico totale, diretto come indicato, avrà modulo

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma \int_0^R dr = \frac{1}{2}\mu_0\omega\sigma R$$