



Prova d'esame del 27 marzo 2017 – Il appello straordinario A.A. 2015-16

**Risolvere, prima analiticamente e poi numericamente, gli esercizi seguenti**

1. Un punto materiale di massa  $m=0,5$  kg, poggiato su un piano orizzontale liscio è sottoposto ad una forza centrale avente espressione  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = A/r \mathbf{u}(\mathbf{r})$  essendo  $\mathbf{r}$  il vettore posizione (appartenente al piano orizzontale) del punto materiale rispetto ad un punto geometrico fisso  $O$  ed  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  il relativo versore. Inizialmente il punto materiale sia fermo a distanza  $d=1$  m dal punto  $O$ . Si osserva che la velocità acquisita dal punto materiale è pari a  $v=3$  m/s in un punto  $P$  a distanza  $2d$  dal punto  $O$ . Si calcoli il valore di  $A$ .
2. Una particella di massa  $m = 0,07$  kg viene tirata verso la sommità di un semicilindro di raggio  $R = 25$  cm privo di attrito da una fune, passante per la cima del semicilindro come illustrato in figura. All'estremo della fune è applicata una forza  $\mathbf{F}$ . Assumendo che la particella si muova con velocità in modulo costante, si trovi il valore di  $F$  in funzione dell'angolo  $\theta$  formato dal punto materiale con il piano orizzontale. Calcolare inoltre il lavoro  $L$  compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  nel portare la massa  $m$  dalla base alla sommità del semicilindro.
3. Una puleggia di raggio  $R = 0.1$  m e momento di inerzia  $I = 0.01$  kg m<sup>2</sup> è collegata tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile ad una massa  $m = 0.5$  kg appoggiata su un piano inclinato (angolo  $\theta = 30^\circ$ ) come mostrato in figura. La fune è avvolta sulla puleggia. La massa  $m$  è anche collegata tramite una molla di costante elastica  $k = 2$  N/m ad un estremo del piano inclinato. L'asse della puleggia ed il piano inclinato sono privi di attrito. All'inizio il sistema è in quiete con la massa posta nella posizione di riposo della molla. Si sposta la massa  $m$  di una distanza  $d = 20$  cm dalla posizione di riposo della molla, allungando la molla ed avvolgendo la puleggia in senso antiorario. Si lascia libero il sistema di muoversi: quale sarà la velocità angolare della puleggia quando la massa  $m$  attraversa nuovamente la posizione di riposo?
4. Un cilindro a pareti adiabatiche chiuso superiormente da un pistone mobile anch'esso adiabatico contiene 100 moli di un gas perfetto monoatomico. All'interno del cilindro, poggiato sul fondo, vi è un blocco di ferro di  $M = 4$  kg, il cui calore specifico vale  $C_{Fe} = 0,45$  J/g K. Nell'ipotesi di compressione reversibile, calcolare il rapporto tra volume iniziale e finale del gas affinché la temperatura finale del blocco di Fe sia doppia di quella iniziale. (Si consideri il blocchetto di Ferro ideale, ovvero assimilabile ad un corpo rigido con un calore specifico costante al variare della temperatura).
5. Una macchina termica lavora tra due sorgenti alle temperature  $T_2 = 600$  K e  $T_1 = 350$  K. La macchina assorbe  $Q_a = 1.00 \times 10^3$  J di calore dalla sorgente a temperatura più alta e compie  $W = 250$  J di lavoro. Si calcolino la variazione di entropia dell'universo  $\Delta S_u$  per questo processo e il lavoro  $W_C$  compiuto da una macchina ideale di Carnot che lavorasse tra le stesse sorgenti.

---

**Rispondete facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.**

**T1** Supponendo di avere un grafico che rappresenti l'andamento dell'energia potenziale in funzione di una variabile spaziale [ad esempio  $U(x)$ ], descrivere come si individuano i diversi punti (o regioni) di equilibrio.

**T2** Dimostrare l'equivalenza dei due enunciati del II principio della termodinamica.



Prova d'esame del 27 marzo 2017 – Il appello straordinario A.A. 2015-16

**Le soluzioni degli esercizi della prova d'esame:**

1. L'energia potenziale associata alla forza  $\mathbf{F}$  è pari a  $U(r) = U(r_0) - A \ln(r/r_0)$ . La conservazione dell'energia meccanica impone  $E_{m,1} = E_{m,2}$  da cui  $\Delta E_k = \frac{1}{2} m v^2 = A \ln(2d/r_0) - A \ln(d/r_0)$  da cui si ricava  $A = 3.25 \text{ Nm}$ .
2. Imponendo che l'accelerazione tangenziale sia nulla, si ottiene  $F - mg \cos\theta = 0$  da cui si ricava  $F = mg \cos\theta$ . Dal teorema dell'energia cinetica otteniamo:  $\Delta E_k = 0 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \Delta E_p$ . Il lavoro della forza  $F$  sarà quindi pari a  $\Delta E_p = mgR - 0$  (avendo posto pari a 0 il valore di  $E_p$  alla base del semicilindro). Dunque  $L = 0.17 \text{ J}$ .
3. In assenza di attrito si avrà  $\Delta E_k = -\Delta E_p$  e dunque  $\frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mg(d \sin \theta) + \frac{1}{2} k d^2$ . Si ricava  $\omega^2 = (mg(d \sin \theta) + \frac{1}{2} k d^2) / (\frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{2} I)$  da cui  $\omega = 8.41 \text{ rad/s}$ .
4. Il sistema è tutto adiabatico e la compressione avviene reversibilmente:

$$\Delta S_{\text{система}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{Fe} = 0$$

⇓

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}} &= n c_V \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i} = n R \left( \frac{3}{2} \ln 2 + \ln \frac{V_f}{V_i} \right) \\ dS_{Fe} &= MC_{Fe} \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{Fe} = MC_{Fe} \ln \frac{T_f}{T_i} = MC_{Fe} \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n R \left( \frac{3}{2} \ln 2 + \ln \frac{V_f}{V_i} \right) + MC_{Fe} \ln 2 = 0$$

⇓

$$\frac{V_i}{V_f} = 12,6$$

5. La variazione dell'entropia dell'universo è  $\Delta S_u = \Delta S_a + \Delta S_g$ . Per un ciclo si avrà  $\Delta S_g = 0$  e quindi  $\Delta S_u = \Delta S_a$ . Il calcolo della variazione di entropia dell'ambiente è pari a  $\Delta S_a = -Q_a/T_2 + |(L-Q_a)|/T_1 = 0.48 \text{ J/K}$ . Il lavoro  $W_C$  è pari ad  $\eta Q_a = (1-T_1/T_2)Q_a = 416.7 \text{ J}$ .