1 Testo

1.1 Problema 1

Robin si trova su una piattaforma che si muove dall'alto verso il basso ad una velocità di $1m/s$. Vuole colpire un bersaglio che si trova inizialmente al suolo, posto a 50 metri di distanza. Assumendo di scagliare la freccia con un angolo di 45 gradi rispetto l'orizzontale, verso l'alto, e assumendo che Robin scocchi la freccia nell'istante in cui si trova a 10 metri di altezza rispetto al suolo, calcolare:

- a che velocità deve scagliare la freccia affinchè colpisca il bersaglio?
- a che velocità deve scagliare la freccia assumendo che anche il bersaglio si trova su una piattaforma mobile che sale verso l'alto a 2m/s?

1.2 Problema 2

Un pendolo composto è formato da un disco sottile di massa $5Kg$ e raggio 0.25m incernierato in un punto sul bordo. Il pendolo si trova nella sua posizione di equilibrio con la verticale passante per il centro di massa. Ad un certo punto si ruota il punto più basso del disco di 30^o rispetto alla verticale e se ne osservano le piccole oscillazioni. Assumendo che la cerniera sia priva di attrito, si determini:

- il periodo delle piccole oscillazioni
- la velocità del centro di massa quando questo si trova a 10^o rispetto la verticale.

1.3 Problema 3

Un asta lunga $1m$, priva di massa, è in condizione di equilibrio su due perni (A e B) posti alle sue estremità. L'asta è in posizione orizzontale e il contatto con i perni è privo di attrito. Si applica una forza perpendicolare di $10N$ all'asta ad una distanza di $0.75m$ da uno dei due estremi. Calcolare le reazioni vincolari che i due perni esercitano sull'asta.

1.4 Problema 4

Un litro di acqua è contenuta in un recipiente cilindrico alla temperatura di -18^oC e pressione ambiente. Una delle pareti del cilindro è a contatto con una sorgente di calore con potenza di $2KW$. Assumendo che il contenitore non scambi calore con l'ambiente circostante e che il tutto avvenga a pressione costante indicare in quanto tempo tutta l'acqua si trova allo stato gassoso.
Dati utili: $c_p = 4,18KJ/KgK$ $\lambda_{fusione} = 333,5KJ/Kg$ $\lambda_{ebollizione} = 2272KJ/Kg$

1.5 Problema 5

Tre moli di O_2 compiono un ciclo reversibile costituito da due trasformazioni adiabatiche AB e CD, unite da una trasformazione isocora BC e una isobara DA. Negli stati A,C e D le temperature sono rispettivamente $T_A = 250K$ $T_C = 450K$ e $T_D = 320K$. Calcolare:

- il lavoro nel ciclo,
- il rendimento del ciclo.

1 Soluzioni

1.1 Problema 1

Nel caso in cui solo la piattaforma di Robin si muove di velocitá $v_p = -1m/s$ la soluzione é data dalla risulozione del sistema:

$$\begin{cases} x_0 = v_x \cdot t \\ y_{0b} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_p \cdot t + v_y \cdot t + y_{0r} \end{cases} \tag{1}$$

dove $x_0 = 50m$ (distanza iniziale Robin-bersaglio), $y_{0r} = 10m$ (altezza iniziale Robin) e $y_{0b} = 0m$ (altezza iniziale bersaglio).

Sostituendo $v_x = v_y = vcos(45)$ dalla prima si ottiene:

$$t = \frac{x_0}{v \cos 45}$$

che può essere sostituita nella seconda equazione del sistema per ottenere una equazione di secondo grado in v:

$$(x_0 + y_{0r} - y_{0b})v^2 + v_p \frac{x_0}{\cos 45} v - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{\cos 45^2}$$

v=20.8 m/s. La soluzione negativa dell'equazione di secondo grado è da escludere date le condizioni iniziali con le quali Robin scocca la freccia.

Scegliendo un sistema di riferimento fisso con il bersaglio, nel caso in cui questo si muova verso l'alto con una velocitá di $2m/s$, la velocita' della piattaforma diventa:

$$v_p' = -1m/s - 2m/s = -3m/s$$

quindi si ottiene **v=22.05m/s**. Lo stesso risultato puó essere ottenuto mantenendo un sistema di riferimento fisso con il terreno e scrivendo l'equazione per $y(t)$ della freccia come segue:

$$\begin{cases} x_0 = v_x \cdot t \\ v_b \cdot t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_p \cdot t + v_y \cdot t + y_{0r} \end{cases} \tag{2}$$

dove $v_b = 2m/s$, velocita' del bersaglio.

1.2 Problema 2

Il momento di inerzia del disco, rispetto al centro di massa, è:

$$I = \frac{1}{2} M r^2$$

il momento di inerzia rispetto al bordo e' (utilizzando il teorema di H-S):

$$I_b = I + Mr^2 = \frac{3}{2} M r^2$$

La seconda equazione cardinale, in regime di piccole oscillazioni, si scrive:

$$I_b \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgr\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgr}{I_b}\theta = -\omega^2\theta$$

con:

$$\omega^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{r}$$

e il periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}} = 6.28\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{0.25}{9.8}} = \mathbf{1.22s}$$

Spostando di 30^o e 10^o un punto del bordo del disco equivale a sollevare il centro di massa di:

$$h_{30} = r - r\cos 30^o = 0.03m$$

$$h_{10} = r - r\cos 10^o = 0.0038m$$

quindi l'energia meccanica totale del pendolo e': $E_m = M \cdot g \cdot h_{30}$. Quando il centro di massa si trova a 10^o dalla verticale avra' energia potenziale $M \cdot g \cdot h_{10}$, e energia rotazionale $\frac{1}{2}I\omega^2$, quindi :

$$M \cdot g \cdot h_{10} + \frac{1}{2}I\omega^2 = M \cdot g \cdot h_{30}$$

$$\frac{3}{4}Mr^2\omega^2 = M \cdot g \cdot (h_{30} - h_{10})$$

quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{4g(h_{30} - h_{10})}{3r^2}} = 2.34rad/s$$

quindi la velocitá del centro di massa a 10^o dalla verticale é:

$$v = \omega r = 2.34 \cdot 0.25 = \mathbf{0.59\ m/s}$$

1.3 Problema 3

In condizione di equilibrio le due equazioni cardinali si scrivono:

$$\begin{cases} F_e = 0 \\ M_e = 0 \end{cases} \tag{3}$$

dato che i contatti sono privi di attrito le reazioni vincolari R_a e R_b sono verticali, quindi scegliendo uno dei due estremi come polo per il calcolo dei momenti:

$$\begin{cases} R_a + R_b - F = 0 \\ R_b \cdot l - F \cdot d = 0 \end{cases} \tag{4}$$

dove $d = 0.75m$ e l è la lunghezza dell'asta. Sostituendo la seconda nella prima si ottiene:

$$R_a = F(1 - d/l) = \mathbf{2.5N}, \quad R_b = \mathbf{7.5N}$$

1.4 Problema 4

Da -18 a 0 l'acqua e' allo stato solido:

$$Q1 = \Delta T \cdot M \cdot c_p = 18K \cdot 1Kg \cdot 4.18KJ/KgK = 75.24KJ$$

dato che la sorgente ha una potenza $P = 2KW = 2KJ/s$:

$$t1 = Q1/P = 37.62s$$

Per liquefare tutto il ghiaccio:

$$Q2 = \lambda_{fusione} \cdot M = 333.5KJ$$

$$t2 = Q2/P = 166.75s$$

Da 0 a 100 l'acqua é allo stato liquido:

$$Q3 = \Delta T \cdot M \cdot c_p = 100K \cdot 1Kg \cdot 4.18KJ/KgK = 418KJ$$

$$t3 = Q3/P = 209s$$

Per far evaporare tutta l'acqua:

$$Q4 = \lambda_{ebollizione} \cdot M = 2272KJ$$

$$t4 = Q4/P = 1136s$$

Il tempo totale é:

$$t1 + t2 + t3 + t4 = \mathbf{1549.37s}$$

1.5 Problema 5

Per il primo principio, il lavoro:

$$L_{tot} = Q_{tot} = Q_{DA} + Q_{BC}$$

le trasformazioni AB e CD sono adiabatiche, quindi:

$$Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) = 3 \cdot \frac{7}{2} R \cdot (250 - 320) = -6107.85J$$

e

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B)$$

Troviamo T_B da:

$$\begin{cases} T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} (adiab.CD) \\ T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} (adiab.AB) \\ V_C = V_B (isobara) \end{cases} \tag{5}$$

quindi, sostituendo si ottiene:

$$\begin{cases} T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} (adiab.CD) \\ T_B V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} (adiab.AB) \end{cases} \tag{6}$$

facendo il rapporto tra le 2:

$$\frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A} \left(\frac{V_D}{V_A} \right)^{\gamma-1}$$

Dato che AD e' isobara:

$$\frac{V_D}{V_A} = \frac{T_D}{T_A}$$

quindi sostituendo nella precedente si ottiene:

$$\frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{T_D}{T_A} \right)^{\gamma}$$

dalla quale si ricava: $T_B = 318.5K$, $Q_{BC} = 8195.7J$ e $L_{tot} = 2087.9J$ il rendimento è:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{BC}} = \mathbf{0.25}$$