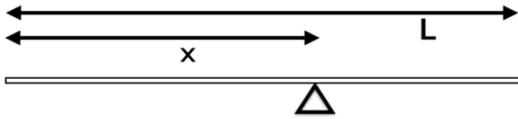




Risolvere, prima analiticamente poi numericamente, gli esercizi seguenti.

1. Un treno che si muove con velocità $v = 150$ km/h orizzontale inizia al tempo $t = 0$ s a decelerare con $|a_t| = 6.7$ m/s² diretta in verso opposto alla velocità. Allo stesso istante $t = 0$ s un corpo di massa $m = 120$ g viene lasciato cadere dal tetto di un vagone alto $h = 3.2$ m. Determinare: **a)** il tempo di caduta; **b)** la distanza a cui il corpo cade sul pavimento del vagone rispetto alla verticale del punto di distacco; **c)** l'accelerazione (nel sistema di riferimento del vagone ed in uno inerziale) che agisce sul corpo ad $h = 1.6$ m e subito prima del contatto con il pavimento del vagone e **d)** la velocità del corpo (in modulo ed angolo rispetto alla verticale) rispetto al vagone al momento del contatto con il pavimento.
2. Una sbarra sottile è in equilibrio sopra un piolo. La sbarra ha lunghezza L e densità di massa lineare non uniforme $\lambda = kx^2$, dove x è la distanza dall'estremo di sinistra. Calcolare la massa della sbarra e la distanza del punto di appoggio sul piolo rispetto all'estremo di sinistra della sbarra. ($k = 2.5$ kg/m³, $L = 70$ cm).

3. Una barca con sopra un masso di roccia galleggia sull'acqua di un lago chiuso (l'acqua non può né uscire né entrare nel lago). Successivamente il masso viene tolto dalla barca e gettato nel lago, dove affonda fino al fondo del lago stesso. Determinare se il livello delle acque del lago sarà maggiore, minore o uguale di quello misurato quando il masso si trovava sopra alla barca (si consideri l'acqua un fluido ideale).
4. Una macchina reversibile utilizza come fluido $n = 2.5$ moli di un gas perfetto biatomico, eseguendo il ciclo costituito dalle seguenti tre trasformazioni: 1) dallo stato iniziale A ($p_1 = 15.0$ atm e $T_1 = 100^\circ\text{C}$) il gas viene fatto espandere isotermicamente fino a che il suo volume si porta allo stato B in cui $V_2 = 4V_1$; 2) seguendo una trasformazione isobara il gas viene portato in uno stato C sull'adiabatica passante per lo stato iniziale; 3) lungo tale adiabatica il gas viene infine riportato allo stato iniziale. Si disegni il ciclo nel piano PV e si determini: **a)** il lavoro L ed il calore Q scambiati dal gas in un ciclo; **b)** il rendimento η del ciclo.
5. Un pendolo semplice di massa m , con calore specifico c_s , si trova all'interno di un contenitore rigido adiabatico in cui è presente una mole di gas perfetto biatomico. Inizialmente il pendolo è bloccato in una posizione in cui la massa e il filo teso di lunghezza l formano un angolo α rispetto alla verticale e tutto il sistema è in equilibrio a temperatura $T_{IN} = 300$ K. Ad un certo istante si rilascia la massa. Determinare: **a)** la differenza di temperatura (esprimendola in mK) tra quella finale alla quale si porta tutto il sistema, dopo che la massa ha cessato di oscillare, e quella iniziale. Determinare inoltre **b)** la conseguente variazione di entropia dell'universo. Si trascurino le capacità termiche del recipiente e del filo, da considerarsi ideale. ($\alpha = 45^\circ$, $l = 0.4$ m, $m = 1$ kg; $c_s = 390$ J/K kg)

Sezione TEORIA

Rispondete facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.

- T1. Sia I_{CM} il momento di inerzia di un corpo rigido di massa m rispetto ad un asse di rotazione che passa per il centro di massa del corpo. Dimostrare che il momento di inerzia relativo ad un altro generico asse di rotazione, parallelo a quello usato per il calcolo di I_{CM} e da esso distante d , è pari ad $I = I_{CM} + md^2$.
- T2. Dimostrare che il rendimento di una macchina termica reversibile che lavori tra due sole temperature T_1 e T_2 è maggiore di quello di una qualsiasi altra macchina irreversibile che lavori con le stesse sole due sorgenti.



----- SOLUZIONI -----

1) Il tempo di caduta **a)** è ottenibile da $t = \sqrt{(2h)/g} = 0.8 \text{ s}$. **b)** La distanza lungo l'asse x a cui cade il corpo, nel sistema di riferimento del treno, è $\Delta x' = 0.5 |\mathbf{a}'_x| t^2 = 2.1 \text{ m}$. Nel sistema di riferimento inerziale $v_{0x} = 150 \text{ km/h}$ (41.7 m/s) e $\Delta x = 33.4 \text{ m}$. **c)** Nel sistema di riferimento inerziale $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Nel sistema di riferimento del vagone invece, $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = 11.9 \text{ m/s}^2$, con un angolo con la verticale pari a -55.6° o -0.97 rad . L'accelerazione è la stessa sia ad $h=1.6 \text{ m}$ che al momento dell'impatto. **d)** La velocità al momento dell'impatto $v'_y = v'_{0y} + a'_y t = -7.8 \text{ m/s}$ e $v'_x = v'_{0x} + a'_x t = 5.36 \text{ m/s}$. Da cui $v' = 9.5 \text{ m/s}$ e $\alpha = \text{atan}(v'_y/v'_x) = -55.6^\circ$ o -0.97 rad

2) L'asta è in equilibrio quando il fulcro è posizionato sotto il CM. $x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x \, dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda \, dx = k/M L^4/4$. La massa totale si calcola come $M = \int_0^L kx^2 \, dx = kL^3/3 = 0.29 \text{ kg}$ e $x_{CM} = 3/4L = 52.5 \text{ cm}$.

3) Il livello delle acque del lago si abbassa quando il masso (m) viene tolto dalla barca (M) e gettato nel lago. Indicando con V_I il volume immerso della barca quando la roccia si trova sopra di essa – pari al volume totale di acqua spostato V_S –, per il principio di Archimede:

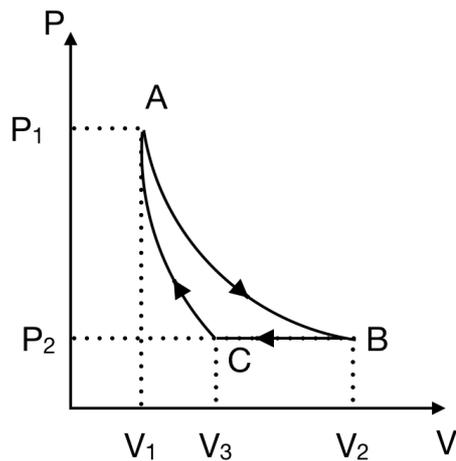
$$(M + m)g = \rho V_I g \Rightarrow V_I = V_S = \frac{M + m}{\rho} = \frac{M + \rho_R V_R}{\rho} = \frac{M}{\rho} + \frac{\rho_R}{\rho} V_R$$

essendo ρ e ρ_R la densità dell'acqua e della roccia, rispettivamente ($\rho < \rho_R$ poiché la roccia, gettata nel lago, affonda), e V_R il volume della roccia.

Quando la roccia è gettata nel lago, il volume immerso della barca sarà $V'_I = M / \rho$ e quindi:

$$V'_S = \frac{M}{\rho} + V_R < V_S.$$

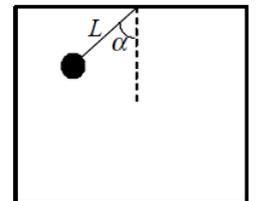
4) Lungo l'isoterma $V_A = nRT_A/p_A = 5.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; $V_B = 4V_A$; $p_B = nRT_A/4V_A = 1/4 p_A$. Lungo l'adiabatica $p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$ (avendosi $p_B = p_C$) da cui $V_C = V_A 4^{(5/7)}$. $T_C = p_B V_C/nR$. $L = Q$ nel ciclo. Nella prima trasformazione (isoterma) avremo $L_{A,B} = Q_{A,B} = nRT_A \ln (V_B/V_A) = 1.07 \cdot 10^4 \text{ J}$. Per l'isobara $Q_{B,C} = nC_p(T_C - T_B) = -8.87 \cdot 10^3 \text{ J}$. Sul ciclo avremo $L = Q = 1.82 \cdot 10^3 \text{ J}$. Per il rendimento $\eta = L/Q_{ass}$ si ottiene $\eta = 0.17$.



5) Dal I principio della Termodinamica $\Delta U_{gas} + \Delta U_{massa} = -L$

$$nC_V \Delta T + mc_s \Delta T = mgl(1 - \cos \alpha) \Rightarrow T_{FIN} = 300.003 \text{ K} \text{ da cui}$$

$$\Delta T = T_{FIN} - T_{IN} = 3 \text{ mK}$$



$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{massa} = nC_V \ln \frac{T_{FIN}}{T_{IN}} + mc_s \ln \frac{T_{FIN}}{T_{IN}} = 3.8 \cdot 10^{-3} \text{ J/K}$$