



**Risolvere, prima analiticamente poi numericamente, gli esercizi seguenti.**

1. Un punto materiale  $A$  viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza dal suolo  $h_A = 45$  m; contemporaneamente, un punto materiale  $B$  viene lanciato da un'altezza  $h_B = 21$  m verso l'alto con velocità iniziale di modulo  $v_0$ . Si calcoli, trascurando la resistenza dell'aria, il valore di  $v_0$  per il quale  $A$  e  $B$  raggiungono contemporaneamente il suolo.
2. Si consideri una pallina di massa  $M = 1$  kg sospesa al soffitto tramite una fune inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza  $L = 40$  cm. La pallina ruota in un piano orizzontale, con la fune che forma un angolo  $\theta = 35^\circ$  con la verticale. Ricavare la tensione della fune e la velocità della pallina. Ad un istante di tempo  $t$  la fune viene tagliata. Calcolare il modulo della velocità della pallina quando la sua quota è diminuita di 70 cm rispetto al piano di rotazione iniziale.
3. Tre sbarrette omogenee di massa  $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 3$  kg e  $m_3 = m_2$  e lunghezza rispettivamente  $L_1 = 40$  cm,  $L_2 = 60$  cm ed  $L_3 = L_2$  vengono saldate agli estremi per formare un triangolo. Il triangolo isoscele così formato viene messo in rotazione attorno all'asse verticale di un motore passante per il lato  $L_1$ . Il sistema è inizialmente fermo. Il motore viene acceso per un intervallo di tempo  $\Delta t = 30$  s. Sapendo che il motore eroga una potenza costante  $P = 250$  W, determinare la frequenza finale di rotazione del triangolo.
4. Quattro moli di gas ideale monoatomico (volume iniziale  $V_A$  pari a  $50$  dm<sup>3</sup>) compiono un ciclo costituito da una trasformazione irreversibile AB, una isoterma reversibile BC alla temperatura  $T_B = 80^\circ\text{C}$  e una compressione adiabatica reversibile CA. Nella trasformazione AB il gas compie il lavoro  $L_{AB} = 20$  kJ, si raffredda di  $40^\circ\text{C}$  e riduce la sua pressione ad un terzo di quella iniziale. Rappresentare schematicamente il ciclo e calcolarne il rendimento.
5. Due moli di gas perfetto sono contenute in un recipiente. Partendo da uno stato iniziale  $A$ , il gas viene sottoposto a due trasformazioni consecutive:
  - I: espansione libera con cui il gas viene portato ad un volume finale  $V_B$  triplo di quello iniziale  $V_A$ ;
  - II: compressione isoterma reversibile alla fine della quale il gas riacquista il suo volume iniziale.Calcolare la variazione di entropia dell'Universo.

### Sezione TEORIA

**Rispondete facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.**

- T1. Ricavare l'energia potenziale della forza gravitazionale.
- T2. Discutere la scelta delle sorgenti di temperatura a cui operare una macchina termica reale, approssimabile con buona precisione ad un ciclo termodinamico reversibile, in modo da renderne massimo il rendimento.



----- SOLUZIONI -----

1. Prendendo un riferimento  $z$  orientato verso l'alto, assumendo  $t=0$ , come istante iniziale, al generico istante  $t$  la posizione dei due punti materiali A e B è data da:

$$z_A(t) = h_A - \frac{1}{2}gt^2 \quad z_B(t) = h_B + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

Al generico istante  $t_1$  la differenza di quota è data da  $\Delta h(t_1) = z_A(t_1) - z_B(t_1) = h_A - h_B - v_0t_1$

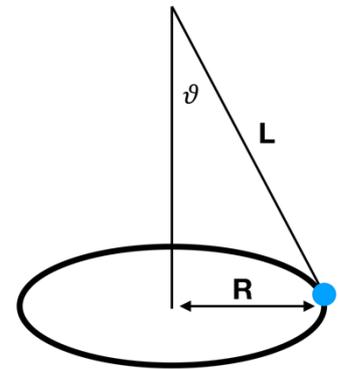
Devono giungere al suolo insieme, all'istante  $t_2$ , che deve essere uguale al tempo di caduta impiegato da A per giungere al suolo

$$\Delta h(t_2) = 0 \quad t_2 = \frac{h_A - h_B}{v_0} = \sqrt{\frac{2h_A}{g}} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 8 \text{ m/s.}$$

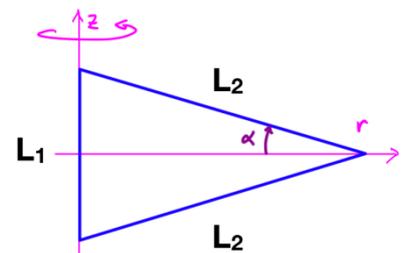
2. a) La distanza a cui ruota la massa  $M$  è pari ad  $R = L \sin \vartheta = 22.9 \text{ cm.}$

Lungo l'asse orizzontale avremo  $-T \sin \vartheta = -Mv^2/R$  e verticalmente  $T \cos \vartheta - Mg = 0$ . Si ottiene dunque  $T = 11.9 \text{ N}$  e  $v = \sqrt{(Rg \tan \vartheta)}$   
 $= 1.25 \text{ m/s.}$

- b) Al momento del taglio della fune, la tensione  $T$  cessa di agire e la componente orizzontale della velocità rimane invariata. La componente verticale varia in seguito all'azione di  $P$ .  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{oriz}} + \mathbf{v}_{\text{vert}}$  da cui  $|\mathbf{v}| = v \sqrt{v^2 + 2gh} = 3.9 \text{ m/s}$



- 3) L'angolo  $\alpha$  è pari ad  $\arcsin(L_1/2L_2) = 19.5^\circ$ . Il momento di inerzia delle due aste  $L_2$  rispetto l'asse  $z$  di rotazione è pari ad  $I_2 = 1/3 ML^2 \cos^2 \alpha$ . Il momento di inerzia totale sarà:  $I = 2 I_2$ . Il lavoro compiuto dal motore è pari a  $L = P \Delta t = 7.5 \text{ kJ}$ . L'energia cinetica di rotazione sarà dunque pari ad  $E_k = 1/2 I \omega^2$ , da cui  $\omega = \sqrt{2E_k/I} = 153 \text{ rad/s}$ . La frequenza di rotazione sarà  $\nu = \omega/2\pi = 24,4 \text{ Hz}$ .



4. Le temperature:  $T_C = T_B = 80 + 273,15 = 353,15 \text{ K}$  e  $T_A = T_B + 40 = 393,15 \text{ K}$ . La variazione di energia interna:  $\Delta U_{AB} = nC_V \Delta T_{AB} = -1994 \text{ J} \approx -2 \text{ kJ}$ , da cui  $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = 18 \text{ kJ}$ .

Per le pressioni:  $p_A = nRT_A/V_A = 260 \text{ kPa}$  e

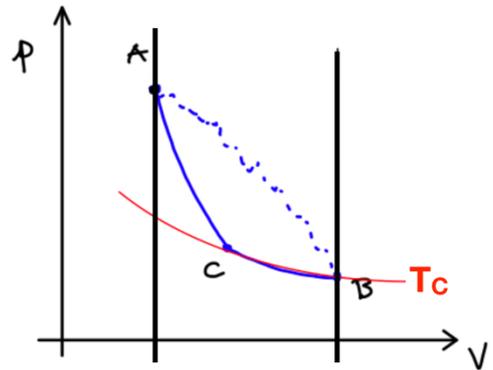
$p_B = p_A/3 = 87 \text{ kPa}$ , da cui  $V_B = 135 \text{ dm}^3$ . Usando la relazione

per le adiabatiche reversibili si ottiene:  $V_C = 58.7 \text{ dm}^3$ , da

cui  $p_C = 200 \text{ kPa}$ . Il calore nell'isoterma reversibile è pari a

$nRT_1 \ln V_C/V_B = -9,7 \text{ kJ}$ . Avendosi  $Q_{ass} = Q_{AB} = +18 \text{ kJ}$  e  $Q_{ced} = Q_{BC} = -9,7 \text{ kJ}$ ,

si ottiene  $\eta = 1 + Q_{ced}/Q_{ass} = 46\%$ .



5.  $\Delta S_{universo} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorgente}$

essendo un ciclo  $\Rightarrow \Delta S_{gas} = 0$

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sorgente} = -\frac{Q_{gas}^{isoterma}}{T_A} = 2R \ln 3 \approx 18.26 \text{ J/K}$$

