



Risolvere, prima analiticamente poi numericamente, gli esercizi seguenti.

1. Un punto materiale A viene lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza dal suolo $h_A = 45$ m; contemporaneamente, un punto materiale B viene lanciato da un'altezza $h_B = 21$ m verso l'alto con velocità iniziale di modulo v_0 . Si calcoli, trascurando la resistenza dell'aria, il valore di v_0 per il quale A e B raggiungono contemporaneamente il suolo.
2. Si consideri una pallina di massa $M = 1$ kg sospesa al soffitto tramite una fune inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza $L = 40$ cm. La pallina ruota in un piano orizzontale, con la fune che forma un angolo $\theta = 35^\circ$ con la verticale. Ricavare la tensione della fune e la velocità della pallina. Ad un istante di tempo t la fune viene tagliata. Calcolare il modulo della velocità della pallina quando la sua quota è diminuita di 70 cm rispetto al piano di rotazione iniziale.
3. Tre sbarrette omogenee di massa $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg e $m_3 = m_2$ e lunghezza rispettivamente $L_1 = 40$ cm, $L_2 = 60$ cm ed $L_3 = L_2$ vengono saldate agli estremi per formare un triangolo. Il triangolo isoscele così formato viene messo in rotazione attorno all'asse verticale di un motore passante per il lato L_1 . Il sistema è inizialmente fermo. Il motore viene acceso per un intervallo di tempo $\Delta t = 30$ s. Sapendo che il motore eroga una potenza costante $P = 250$ W, determinare la frequenza finale di rotazione del triangolo.
4. Quattro moli di gas ideale monoatomico (volume iniziale V_A pari a 50 dm³) compiono un ciclo costituito da una trasformazione irreversibile AB, una isoterma reversibile BC alla temperatura $T_B = 80^\circ\text{C}$ e una compressione adiabatica reversibile CA. Nella trasformazione AB il gas compie il lavoro $L_{AB} = 20$ kJ. Alla fine della trasformazione irreversibile la temperatura è inferiore di 40°C rispetto a quella iniziale ed il gas riduce la sua pressione ad un terzo di quella iniziale. Rappresentare schematicamente il ciclo e calcolarne il rendimento.
5. Due moli di gas perfetto sono contenute in un recipiente. Partendo da uno stato iniziale A , il gas viene sottoposto a due trasformazioni consecutive:
 - I: espansione libera con cui il gas viene portato ad un volume finale V_B triplo di quello iniziale V_A ;
 - II: compressione isoterma reversibile alla fine della quale il gas riacquista il suo volume iniziale.Calcolare la variazione di entropia dell'Universo.

Sezione TEORIA

Rispondete facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.

- T1. Ricavare l'energia potenziale della forza gravitazionale.
- T2. Discutere la scelta delle sorgenti di temperatura a cui operare una macchina termica reale, approssimabile con buona precisione ad un ciclo termodinamico reversibile, in modo da renderne massimo il rendimento.



----- SOLUZIONI -----

1. Prendendo un riferimento z orientato verso l'alto, assumendo $t=0$, come istante iniziale, al generico istante t la posizione dei due punti materiali A e B è data da:

$$z_A(t) = h_A - \frac{1}{2}gt^2 \quad z_B(t) = h_B + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

Al generico istante t_1 la differenza di quota è data da $\Delta h(t_1) = z_A(t_1) - z_B(t_1) = h_A - h_B - v_0t_1$

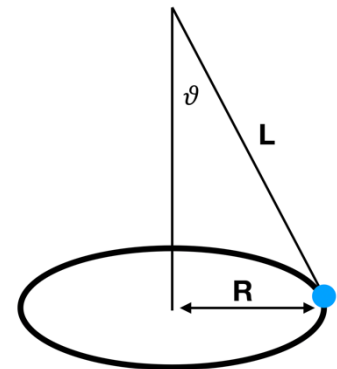
Devono giungere al suolo insieme, all'istante t_2 , che deve essere uguale al tempo di caduta impiegato da A per giungere al suolo

$$\Delta h(t_2) = 0 \quad t_2 = \frac{h_A - h_B}{v_0} = \sqrt{\frac{2h_A}{g}} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 8 \text{ m/s.}$$

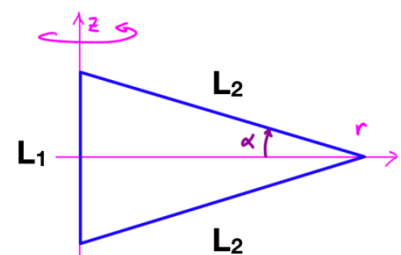
2. a) La distanza a cui ruota la massa M è pari ad $R = L \sin \vartheta = 22.9 \text{ cm}$.

Lungo l'asse orizzontale avremo $-T \sin \vartheta = -Mv^2/R$ e verticalmente $T \cos \vartheta - Mg = 0$. Si ottiene dunque $T = 11.9 \text{ N}$ e $v = \sqrt{(Rg \tan \vartheta)} = 1.25 \text{ m/s}$.

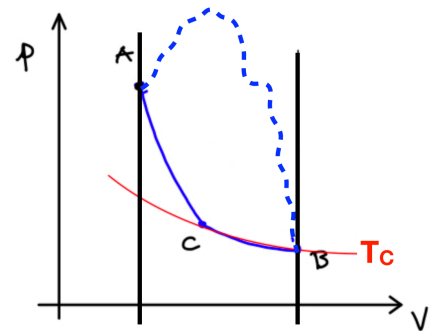
- b) Al momento del taglio della fune, la tensione T cessa di agire e la componente orizzontale della velocità rimane invariata. La componente verticale varia in seguito all'azione di P . $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{oriz}} + \mathbf{v}_{\text{vert}}$ da cui $|\mathbf{v}| = v \sqrt{v^2 + 2gh} = 3.9 \text{ m/s}$



- 3) L'angolo α è pari ad $\arcsin(L_1/2L_2) = 19.5^\circ$. Il momento di inerzia delle due aste L_2 rispetto l'asse z di rotazione è pari ad $I_2 = 1/3 ML^2 \cos^2 \alpha$. Il momento di inerzia totale sarà: $I = 2 I_2$. Il lavoro compiuto dal motore è pari a $L = P \Delta t = 7.5 \text{ kJ}$. L'energia cinetica di rotazione sarà dunque pari ad $E_k = 1/2 I \omega^2$, da cui $\omega = \sqrt{2E_k/I} = 153 \text{ rad/s}$. La frequenza di rotazione sarà $\nu = \omega/2\pi = 24,4 \text{ Hz}$.



4. Le temperature: $T_C = T_B = 80 + 273,15 = 353,15 \text{ K}$ e $T_A = T_B + 40 = 393,15 \text{ K}$. La variazione di energia interna: $\Delta U_{AB} = nC_V \Delta T_{AB} = -1994 \text{ J} \approx -2 \text{ kJ}$, da cui $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = 18 \text{ kJ}$. Per le pressioni: $p_A = nRT_A/V_A = 260 \text{ kPa}$ e $p_B = p_A/3 = 87 \text{ kPa}$, da cui $V_B = 135 \text{ dm}^3$. Usando la relazione per le adiabatiche reversibili si ottiene: $V_C = 58.7 \text{ dm}^3$, da cui $p_C = 200 \text{ kPa}$. Il calore nell'isoterma reversibile è pari a $nRT_1 \ln V_C/V_B = -9,7 \text{ kJ}$. Avendosi $Q_{ass} = Q_{AB} = +18 \text{ kJ}$ e $Q_{ced} = Q_{BC} = -9,7 \text{ kJ}$, si ottiene $\eta = 1 + Q_{ced}/Q_{ass} = 46\%$.



5. $\Delta S_{universo} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorgente}$

essendo un ciclo $\Rightarrow \Delta S_{gas} = 0$

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sorgente} = -\frac{Q_{gas}^{isoterma}}{T_A} = 2R \ln 3 \approx 18.26 \text{ J/K}$$

