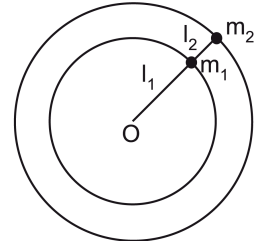




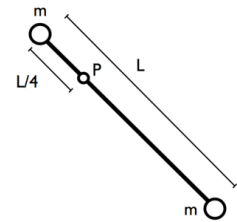
**Risolvere, prima analiticamente poi numericamente, laddove richiesto, gli esercizi seguenti.**

1. Una massa puntiforme  $m_1$  è attaccata ad un estremo di una corda avente lunghezza  $l_1$ , il cui altro estremo è fissato in un punto  $O$  su di un piano orizzontale privo di attrito: la massa si muove di moto circolare uniforme su tale piano. Una seconda massa puntiforme  $m_2$  è attaccata radialmente alla prima tramite una corda di lunghezza  $l_2$  e si muove anch'essa di moto circolare uniforme con la stessa velocità angolare di  $m_1$ . Noto il periodo  $T$  del moto, trovare le tensioni  $\tau_1$  e  $\tau_2$  delle due corde (da considerarsi ideali, ovvero inestensibili e prive di massa).



2. Una massa  $M$  di legno è collegata a una molla di costante elastica  $K$ . Il sistema è in quiete su un piano liscio orizzontale quando al tempo  $t = 0$  la massa  $M$  è colpita da un proiettile di massa  $m$  e velocità  $v_0$  che vi si conficca. Trascurando gli attriti, ricavare la legge oraria del moto del sistema dopo l'urto esplicitando ampiezza, fase iniziale e pulsazione del moto in termini dei dati disponibili.

3. La sbarra in figura, di lunghezza  $L = 25$  cm e massa trascurabile, può ruotare nel piano verticale, con attrito trascurabile, intorno ad un punto  $P$ , situato a distanza  $L/4$  dall'estremo dell'asta. Agli estremi della sbarra sono incernierate due masse  $m$ . Ricavare l'equazione differenziale che descrive il moto dell'asta nel caso di piccole oscillazioni ed il relativo periodo.



4. Un recipiente cilindrico verticale adiabatico di sezione  $S = 0.02$  m<sup>2</sup>, chiuso da un pistone adiabatico scorrevole libero di muoversi senza attriti, contiene  $n = 2$  moli di gas perfetto biatomico. Sul pistone agisce una forza verticale  $F = 2990$  N costante, comprensiva della forza peso del pistone e della pressione atmosferica; nello stato di equilibrio iniziale  $A$ , la base del pistone si trova ad altezza  $h = 0.6$  m dal fondo. Successivamente, l'isolamento termico del fondo del cilindro viene rimosso e il gas viene messo a contatto termico con una sorgente contenente acqua alla temperatura  $T_0 = 290$  K. Quando il sistema raggiunge il nuovo stato di equilibrio  $B$ , si misura la temperatura  $T_B = 280$  K. Ricordando che il calore specifico dell'acqua è  $c = 4186$  J/(kg K), determinare: a) la temperatura iniziale  $T_A$  del gas; b) la massa  $m$  dell'acqua; c) il lavoro compiuto dal gas e la sua variazione di energia interna nella trasformazione  $AB$ .

5. Una macchina termica diretta, che lavora con  $Ar$  (da considerarsi ideale), compie un ciclo reversibile composto da una espansione politropica ( $A \Rightarrow B$ ), una compressione isoterma ( $B \Rightarrow C$ ) e una compressione adiabatica ( $C \Rightarrow A$ ). Sapendo che  $T_A/T_B = 2$  e che il rapporto di compressione dell'isoterma  $V_C/V_B = 0.5$ , calcolare:  
**a)** il calore molare e l'indice della politropica;  
**b)** il rendimento della macchina termica.

### Sezione TEORIA

**Rispondete facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.**

- T1.** Supponendo di avere un grafico che rappresenti l'andamento dell'energia potenziale in funzione di una variabile spaziale [ad esempio  $U(x)$ ], descrivere come si individuano i diversi punti (o regioni) di equilibrio.
- T2.** Discutere la scelta delle sorgenti di temperatura a cui operare una macchina termica reale, approssimabile con buona precisione ad un ciclo termodinamico reversibile, in modo da renderne massimo il rendimento.



----- SOLUZIONI -----

1. Applicando la seconda legge della dinamica alle singole masse  $m_1$  e  $m_2$ , e proiettando tale relazione in direzione radiale, si ha:

$$\begin{aligned} \text{per } m_1: \quad \tau_1 - \tau_2 &= m_1 a_1 & \text{dove} \quad a_1 &= \omega^2 l_1 \\ \text{per } m_2: \quad \tau_2 &= m_2 a_2 & \text{dove} \quad a_2 &= \omega^2 (l_1 + l_2) \end{aligned}$$

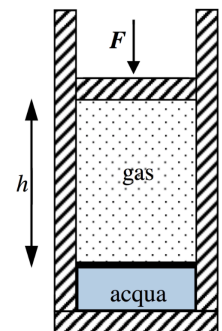
da cui si ottiene:

$$\tau_2 = m_2 \omega^2 (l_1 + l_2) \quad \text{e} \quad \tau_1 = \omega^2 [m_2 (l_1 + l_2) + m_1 l_1] \quad \text{dove} \quad \omega = 2\pi/T$$

2. Nell'urto ( $t = 0$ ) si conserva la quantità di moto:  $m v_0 = (m + M) V$ . Per  $t$  maggiore di zero si avrà:  $(m + M) d^2x/dt^2 = -K x$  da cui  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . Con  $\omega = \sqrt{K / (m + M)}$ . Imponendo le condizioni iniziali:  $x(t=0) = 0$  e  $v(t=0) = V = v_0 m / (m + M)$  si ottiene:  $\phi = \pi/2$  e  $A = -v_0 m / \sqrt{K (m + M)}$ .

3. Si ha  $M = I d^2\theta/dt^2$ . Considerando che  $I = m(L/4)^2 + m(3L/4)^2 = 5/8 mL^2$  e che la somma dei momenti della forza peso sulle due masse è pari a  $-3/4L mg \sin\theta + 1/4L mg \sin\theta = -1/2 L mg \sin\theta = M$  si ottiene per le piccole oscillazioni che  $d^2\theta/dt^2 + \omega^2 \theta = 0$  con  $\omega = \sqrt{4g/5L}$ . Il periodo  $T$  si calcola come  $2\pi/\omega = 1.12 \text{ s}$

4. Per il calcolo di  $T_A = p_A V_A / nR = (F/S) Sh / nR = Fh / nR = 108 \text{ K}$ . Nella successiva trasformazione isobara c'è scambio di calore tra acqua e gas in un sistema adiabatico.  $Q_{TOT} = 0 = Q_{gas} + Q_{acqua}$ . Da cui  $m = n c_p (T_B - T_A) / c (T_0 - T_B) = 0.24 \text{ kg}$ . Per il calcolo del lavoro e della variazione di energia interna:  $L = -\Delta U + Q$ ,  $\Delta U = n c_v (T_B - T_A) = 7146 \text{ J}$  e  $L = -n c_v (T_B - T_A) + n c_p (T_B - T_A) = n R (T_B - T_A) = 2859 \text{ J}$



5. Essendo la variazione di entropia del gas nulla in un ciclo  $\Delta S = c_k \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + R \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = 0$

si ottiene che  $c_k = -R \Rightarrow K = \frac{7}{5}$

e il rendimento del ciclo vale  $\eta = 1 + \frac{RT_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)}{c_K(T_B - T_A)} = 0.3$

---