SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

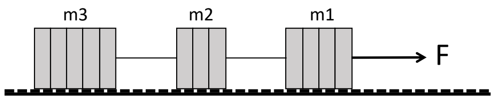
Appello dell'8 febbraio 2021 – prova scritta di Fisica 1

1) La piattaforma di una giostra parte da ferma ruotando con una accelerazione angolare Ω. Si consideri un punto materiale fermo ad una distanza R=5m dal centro della giostra. Determinare:

- **a)** modulo, direzione e verso del vettore *accelerazione lineare* sentito dal punto materiale al tempo t.
- **b)** modulo, direzione e verso (fare un disegno) del vettore *accelerazione di Coriolis* se il punto materiale non fosse fermo ma si muovesse radialmente verso l'esterno con velocità istantanea v.

Darne i valori numerici per di Ω=0,1 rad/s^2, R=5m, t=10s, v=0,5 m/s.

2) Tre blocchi di massa rispettivamente m_1=4 Kg, m_2=3Kg e m_3=5Kg poggiano su un piano orizzontale scabro (μ_d=0,3) e sono uniti da due funi inestensibili e di massa trascurabile. Sul blocco 1 agisce una forza orizzontale F (50N). Si determini l'accelerazione di ciascun blocco e la tensione delle due funi.

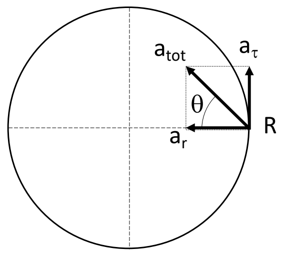


3) Nel punto A più elevato di una montagna russa (a 10 m dal suolo) il carrellino che trasporta le persone viaggia alla velocità v. Subito dopo il carrellino scende fino al suolo (punto B) dove c'è una cunetta di raggio R_B (11m). **A)** Calcolare quanto dovrebbe essere la velocità v affinché nella cunetta i passeggeri sentano il proprio peso triplicato.
B) Successivamente risale sulla sommità di un dosso (punto C) che si trova a 5 m dal suolo. Qui i passeggeri sentono di non appoggiare più sul sedile. Calcolare il raggio di curvatura R_d alla cima del dosso. Considerare gli attriti trascurabili.

4) Un recipiente adiabatico e diviso in due parti uguali da una parete isolante. Una parte contiene un gas perfetto a temperatura e pressione iniziali T_1 = 300K e p_1 = 1 atm. Nell'altra parte è contenuta una quantità dello stesso gas perfetto a temperatura e pressione iniziali T_2 = 500K e p_2 = 3 atm. Se la parete viene rimossa e i due gas si mescolano, determinare la temperatura e la pressione del gas nella condizione di equilibrio finale.

5) Una macchina termica reversibile esegue un ciclo di Carnot usando aria calda (γ=1.4) prelevata alla pressione massima p_{max} ed alla temperatura T_{max}. In queste condizioni il volume iniziale dell'aria è V_{min}. Dopo la prima espansione isoterma l'aria occupa un volume V_{medio} e dopo la successiva espansione adiabatica il volume diventa V_{max}. Calcolare il lavoro fornito dalla macchina per ogni ciclo ed il rendimento della macchina.
p_{max} =7 atm, T_{max}=127 °C, V_{min}=2x10^{-3} m^3, V_{medio} = 5 litri, V_{max} = 8 litri.

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio
08 febbraio 2021 – Soluzioni dello scritto di Fisica 1



1A) Il punto P sentirebbe una accelerazione tangenziale:

$$a_\tau = \Omega R$$

e una accelerazione radiale centripeta:

$$a_r = -\omega^2 R = -(\Omega t)^2 R$$

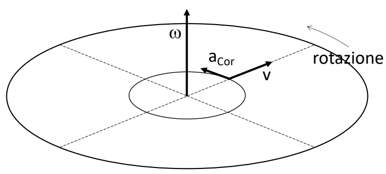
quindi il modulo dell'accelerazione totale vale

$$a_{tot} = \sqrt{a_\tau^2 + a_r^2} = R\Omega\sqrt{1+\Omega^2 \mathrm{t}^4} = 5{,}0\,\frac{m}{s^2}$$

L'angolo q vale:

$$tg\ (\theta) = \frac{a_\tau}{a_r} = \frac{1}{\Omega t^2} \quad \rightarrow \quad \theta = atg\left(\frac{1}{\Omega t^2}\right) = 0{,}1\ \mathrm{rad} = 5{,}7°.$$

Il verso è verso l'interno della giostra, come in figura.



1B) l'accelerazione di Coriolis vale:

$$\vec{a}_{Cor} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}$$

il vettore ω è diretto verticalmente come l'asse della giostra mentre la velocità è nel piano ed è radiale. Pertanto, i due vettori sono ortogonali e il prodotto vettoriale (cioè l'risulta massimo e in modulo vale:

$$a_{Cor} = 2\ \omega v = 2\Omega t v = 1\,\frac{m}{s^2}$$

è orientato tangenzialmente alla traiettoria circolare nello stesso verso della rotazione.

2) Per il calcolo dell'accelerazione totale possiamo considerare l'insieme delle tre masse:

$$m_{tot} a = (m_1 + m_2 + m_3)a = F - A_1 - A_2 - A_2$$

Esplicitando per l'accelerazione si ottiene:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} - \mu_d g = 1{,}2\,\frac{m}{s^2}$$

Per le tensioni possiamo scrivere le equazioni delle forze per ogni singola massa:

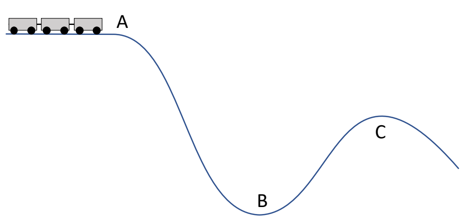
$$\begin{cases} m_1 a = F - T_{12} - A_1 \\ m_2 a = T_{12} - T_{23} - A_2 \\ m_3 a = T_{23} - A_3 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene:

$$T_{23} = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F = 20{,}8\ N$$

$$T_{12} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} F + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} F = \frac{{m_2}^2 - {m_1}^2 + m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_3)} F = 4{,}8\ N$$

come si vede le tensioni non risentono dell'attrito perché questo agisce su entrambi le masse, quella trainante e quella trainata e gli effetti si annullano a vicenda.



3A) Per comodità assegniamo le lettere A, B e C rispettivamente al punto più alto, al fondo della cunetta e alla sommità del dosso. Poiché gli attriti sono trascurabili si conserva l'energia meccanica:

$$mgh_A + \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2$$

Poiché i passeggeri devono sentire il peso triplicato, nel punto più basso avremo che la somma delle forze sentite (peso e forza centrifuga) dev'essere uguale a 3 volte il peso:

$$mg + m\frac{v_B^2}{R} = 3mg \quad \rightarrow \quad v_B^2 = 2R_B g$$

$$v_A = \sqrt{2g(R_B - h_A)} = 4{,}4\frac{m}{s}$$

3B) sulla sommità del dosso:

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_C + \frac{1}{2}mv_C^2$$

Poiché i passeggeri devono sentirsi senza peso, la forza centrifuga dev'essere in questo caso bilanciare il peso il peso:

$$m\frac{v_C^2}{R} = mg$$

sostituendo si ricava

$$2gh_A - 2gh_C + v_A^2 = +gR$$

$$R = 2(h_A - h_C) + \frac{v_A^2}{g} = 2(R_B - h_C) = 12\ m$$

4) Nello stato iniziale le due porzioni devono soddisfare l'equazione di stato:

$$p_1 V = n_1 R T_1 \quad \rightarrow \quad n_1 = \frac{p_1 V}{R T_1}$$

$$p_2 V = n_2 R T_2 \quad \rightarrow \quad n_2 = \frac{p_2 V}{R T_2}$$

mentre nello stato finale il gas miscelato deve soddisfare l'equazione:

$$p_f V_f = p_f\ 2V = (n_1 + n_2) R T_f = \left(\frac{p_1 V}{R T_1} + \frac{p_2 V}{R T_2}\right) R T_f \quad \rightarrow \quad p_f = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right) T_f$$

Il calcolo della temperatura finale può essere fatto considerando che il recipiente è adiabatico

$$Q = 0$$

e che in una espansione libera, non spingendo su nessuna parete anche il lavoro totale è nullo:

$$L = 0$$

per cui

$$\Delta U = 0 = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

$$n_1 c_v (T_f - T_1) + n_2 c_v (T_f - T_2) = 0$$

Esplicitando la temperatura finale si ricava:

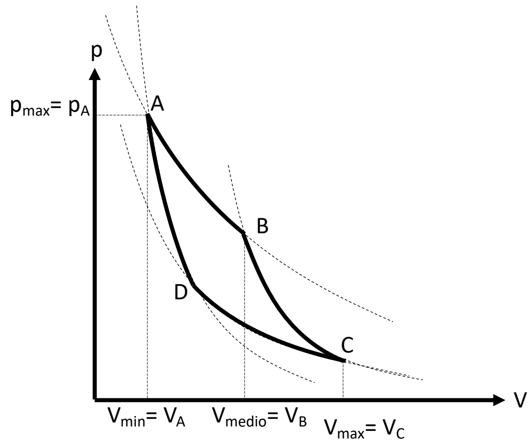
$$T_f = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = \frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}} = \frac{1 + 3}{\frac{1}{300} + \frac{3}{500}} = 428{,}6K$$

da cui

$$p_f = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right) T_f = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right) \frac{p_1 + p_2}{\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = 2\ atm$$

5) Il rendimento di una macchina di Carnot è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{T_{CD}}{T_{AB}}$$



Conosciamo T_{AB} ma non T_{CD}. Per far questo usiamo le funzioni politropiche per l'adiabatica:

$$T_{AB}V_B^{\gamma-1} = T_{CD}V_C^{\gamma-1}$$

da cui

$$T_{CD} = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} T_{AB}$$

da cui:

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1}$$

Numericamente:

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_{medio}}{V_{max}}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{1,4-1} = 0,17$$

Per calcolare il lavoro ricordiamo la definizione di rendimento:

$$\eta = \frac{L}{Q_{assorbito}} \quad \rightarrow \quad L = \eta\, Q_{assorbito}$$

Il calore assorbito è quello lungo la trasformazione isoterma AB:

$$Q_{assorbito} = nR\, T_{AB} \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Per cui:

$$L = \eta\, Q_{assorbito} = \eta\, nR\, T_{AB} \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Il numero di moli può essere calcolato dall'equazione di stato dei gas perfetti applicato al punto A:

$$p_A V_A = nR\, T_{AB}$$

$$L = \eta\, p_A V_A \log\frac{V_B}{V_A}$$

Numericamente:

$$V_{min} = 0,002\ m^3$$

$$p_{max} = 7\ atm = 7,1\ 10^5\ Pascal$$

$$\boldsymbol{L} = \eta\, p_{max}V_{min} \log\left(\frac{V_{medio}}{V_{min}}\right) = 1,17 \cdot (7,1 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^{-3}) \cdot \log\left(\frac{5}{2}\right) = \boldsymbol{662\ J}$$