SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

Appello del 05 luglio 2021 – prova scritta di Fisica Generale

1) Un corpo segue un moto piano descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y(t) = A\cos(\omega t) \end{cases}$$

con u e ω costanti. Calcolare:

a) l'equazione della traiettoria
b) le ascisse dei punti in cui il modulo della velocità è minimo
c) il raggio di curvatura in questi punti.

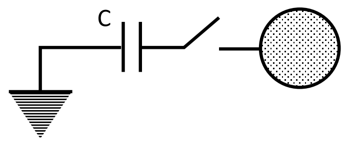
2) Sia data l'energia potenziale U=-Kxy con K costante. Calcolare:

a) l'espressione del vettore forza in tutti i punti dello spazio;
b) Il lavoro di questa forza per andare dal punto (x_0,y_0), al punto (x_1,y_1);
c) la velocità nel punto (x_1,y_1) di un corpo fermo nel punto (x_0,y_0).

3) Una pompa di calore, che sfrutta 5 moli di un gas perfetto monoatomico, segue un ciclo termodinamico costituito da due trasformazioni isoterme (alle temperature T_B=300K e T_A=1,2 T_B) e due trasformazioni isocore ($V_{maggiore}$=3V_{minore}). Dopo aver disegnato il ciclo sul piano di Clapeyron calcolare:

a) il lavoro che deve essere fatto per far funzionare la macchina;
b) il coefficiente di prestazione.

4) Un condensatore piano di capacità C è inizialmente scarico ed ha una delle due armature collegata a massa (V_m=0 V). L'altra armatura viene collegata, tramite un interruttore, ad un conduttore sferico di raggio R che si trova inizialmente ad un potenziale V_0. Trovare la quantità di carica sulle armature del condensatore e la differenza di potenziale.



5) All'interno di un solenoide indefinito, di sezione S e con n spire/metro, una bobina di area A<S, costituita da N spire, ruota intorno ad un proprio diametro perpendicolare all'asse del solenoide con velocità angolare costante ω.

a) Calcolare come varia nel tempo il coefficiente di mutua induzione tra il solenoide e la bobina.
b) Se nella bobina scorre una corrente costante I, determinare la f.e.m. indotta sul solenoide.

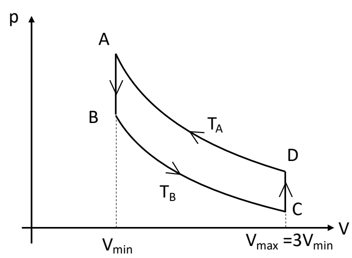
[si considerino note: S, n, A, N, ω, I]

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio
05 luglio 2021 – Soluzioni dello scritto di Fisica Generale

1a) L'equazione della traiettoria si ottiene unificando le due equazioni eliminando il tempo:
$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y(t) = A\cos(\omega t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(x) = A\cos\left(\frac{\omega}{u}x\right)$$
1b) Calcoliamo le componenti della velocità derivando le posizioni:
$$\begin{cases} v_x(t) = u \\ v_y(t) = \omega A\sin(\omega t) \end{cases}$$
da cui si evince che in punti dove la velocità è minima sono quelli in cui si annulla la componente y della velocità (funzione seno) perché la componente x è costante:
$$\omega t = N\pi \qquad dove\ N = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$$
da cui possiamo calcolare il tempo:
$$t = \frac{N\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad x = u\frac{N\pi}{\omega}$$
1c) Per determinare il raggio della traiettoria osserviamo che le accelerazioni valgono:
$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) \end{cases}$$
Si noti che nelle posizioni calcolate al punto 1b le velocità sono orientate lungo x mentre l'accelerazione è lungo y e quindi ortogonale alla velocità. Pertanto questa costituisce una accelerazione centripeta:
$$|a_y(t)| = \omega^2 A = |a_{centripeta}| = \frac{v^2}{R} = \frac{v_x^2}{R} = \frac{u^2}{R}$$
da cui:
$$R = \frac{u^2}{\omega^2 A}$$

2a) La forza è data dal gradiente dell'energia potenziale cambiato di segno. Quindi:
$$\vec{f}(x,y) = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} = Ky\,\hat{\imath} + Kx\,\hat{\jmath}$$
2b) Il lavoro è uguale alla variazione dell'energia potenziale cambiata di segno:
$$L = U_{in} - U_{fin} = -Kx_0y_0 + Kx_1y_1$$
2c) Per calcolare la velocità possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale:
$$T_0U_0 = T_1U_1$$
$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}(x_1y_1 - x_0y_0)}$$

3a) il ciclo segue l'andamento in figura:
Il lavoro del ciclo è dato solo dalle due trasformazioni isoterme in quanto il lavoro delle trasformazioni isocore è nullo:



$$L_{totale} = L_{BC} + L_{AD} = nR(T_B - T_A)\ln\frac{V_{max}}{V_{min}} = -2{,}7\ kJ$$
3b) il coefficiente di prestazione della pompa di calore è definito come il calore ceduto alla sorgente calda diviso per il lavoro totale prodotto:

$$CdP_{PdC} = \frac{Q_{ceduto}}{L_{totale}}$$

calcoliamo di calori scambiati:

$$Q_{AB} = n\, c_v(T_B - T_A) < 0$$
$$Q_{CD} = n\, c_v(T_A - T_B) > 0$$
$$Q_{BC} = nRT_B \ln\frac{V_{max}}{V_{min}} > 0$$
$$Q_{DA} = nRT_A \ln\frac{V_{min}}{V_{max}} < 0$$

Quindi:

$$CdP_{PdC} = \frac{Q_{DA} + Q_{AB}}{L_{totale}} = \frac{RT_A \ln\frac{V_{min}}{V_{max}} + \ c_v(T_B - T_A)}{R(T_B - T_A)\ln\frac{V_{max}}{V_{min}}} = \frac{\ln 3 + \frac{3}{2}\cdot 0{,}2}{0{,}2\cdot \ln 3} = 6{,}4$$

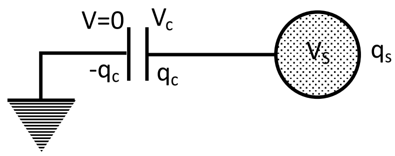
4) La sfera, per trovarsi al potenziale V_0, deve contenere una carica q_0 tale che:

$$V_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

da cui

$$q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_0$$

Questa è tutta la carica a disposizione e, al momento della chiusura dell'interruttore, si ridistribuirà tra condensatore e sfera in modo da rendere equipotenziale tutto il conduttore formato dalla sfera e da una delle armature:



$$q_0 = q_C + q_S$$

L'altra armatura attirerà dalla massa una carica uguale ma di segno opposto. In questo modo la DDP tra le armature del condensatore sarà:

$$\Delta V_C = V_C - 0 = V_C = \frac{q_C}{C} = V_S = \frac{q_S}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Da qui possiamo calcolare la carica sulla sfera in funzione di quella sul condensatore:

$$q_S = \frac{4\pi\varepsilon_0 R}{C} q_C$$

Ricordando che:

$$q_0 = q_C + q_S$$

si trova:

$$q_0 = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 = q_C + q_S = q_C\left(1 + \frac{4\pi\varepsilon_0 R}{C}\right)$$
$$q_C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R V_0 C}{C + 4\pi\varepsilon_0 R}$$
$$\Delta V_C = \frac{q_C}{C} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R V_0}{C + 4\pi\varepsilon_0 R}$$

5a) Il flusso del campo B attraverso la bobina è dato da:

$$\phi_{bob} = M i_{sol} = N_{spire\ bob} A_{bob} B_{sol} cos(\omega t) = NA\, \mu_0 n i_{sol} cos(\omega t)$$

da cui

$$M = M(t) = NA\, \mu_0 n\, cos(\omega t)$$

5b) La forza elettromotrice indotta è data da:

$$fem = -\frac{d\phi_{sol}}{dt} = -\frac{d}{dt} M i_{bob} = -\frac{d}{dt} M(t) I = -I\frac{d}{dt} M(t) = I\, NA\, \mu_0 n\, sin(\omega t)$$