SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

Appello del 05 luglio 2021 – prova scritta di Fisica 1

1) Un corpo segue un moto piano descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y(t) = A\cos(\omega t) \end{cases}$$

con u e ω costanti. Calcolare:

a) l'equazione della traiettoria
b) le ascisse dei punti in cui il modulo della velocità è minimo
c) il raggio di curvatura in questi punti.

2) Un sasso di massa m è attaccato ad una fune lunga L e di massa trascurabile. Tramite la fune il sasso è fatto girare in un piano verticale. Calcolare:

a) la velocità minima che il sasso può avere nel punto più alto della traiettoria;
b) la velocità angolare a cui si romperà il filo se la sua tensione di rottura è di T_R.
c) darne i risultati numerici per m=100gr, L=41 cm, T_R=5 N.

3) Sia data l'energia potenziale U=-Kxy con K costante. Calcolare:

a) l'espressione del vettore forza in tutti i punti dello spazio;
b) Il lavoro di questa forza per andare dal punto (x_0,y_0), al punto (x_1,y_1);
c) la velocità nel punto (x_1,y_1) di un corpo fermo nel punto (x_0,y_0).

4) 2 moli di gas perfetto biatomico eseguono la trasformazione reversibile di equazione $p = A \cdot V$ (A costante) partendo da una situazione in cui il gas si trova alla temperatura T_0=300K. Durante tale trasformazione il gas raddoppia il proprio volume. Calcolare:

a) il lavoro durante la trasformazione;
b) il calore assorbito dal gas;
c) il calore specifico della trasformazione.

5) Una pompa di calore, che sfrutta 5 moli di un gas perfetto monoatomico, segue un ciclo termodinamico costituito da due trasformazioni isoterme (alle temperature T_B=300K e T_A=1,2 T_B) e due trasformazioni isocore ($V_{maggiore}$=3V_{minore}). Dopo aver disegnato il ciclo sul piano di Clapeyron calcolare:

a) il lavoro che deve essere fatto per far funzionare la macchina;
b) il coefficiente di prestazione.

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio
05 luglio 2021 – Soluzioni dello scritto di Fisica 1

1a) L'equazione della traiettoria si ottiene unificando le due equazioni eliminando il tempo:

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y(t) = A\cos(\omega t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad y(x) = A\cos\left(\frac{\omega}{u}x\right)$$

1b) Calcoliamo le componenti della velocità derivando le posizioni:

$$\begin{cases} v_x(t) = u \\ v_y(t) = \omega A \sin(\omega t) \end{cases}$$

da cui si evince che in punti dove la velocità è minima sono quelli in cui si annulla la componente y della velocità (funzione seno) perché la componente x è costante:

$$\omega t = N\pi \qquad dove\ N = 0, \pm 1, \pm 2 \dots\dots$$

da cui possiamo calcolare il tempo:

$$t = \frac{N\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad x = u\frac{N\pi}{\omega}$$

1c) Per determinare il raggio della traiettoria osserviamo che le accelerazioni valgono:

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) \end{cases}$$

Si noti che nelle posizioni calcolate al punto 1b le velocità sono orientate lungo x mentre l'accelerazione è lungo y e quindi ortogonale alla velocità. Pertanto questa costituisce una accelerazione centripeta:

$$|a_y(t)| = \omega^2 A = |a_{centripeta}| = \frac{v^2}{R} = \frac{v_x^2}{R} = \frac{u^2}{R}$$

da cui:

$$R = \frac{u^2}{\omega^2 A}$$

2a) Nel punto più alto durante la rotazione il sasso sentirà le seguenti forze:

$$\vec{F}_{centripeta} = \vec{P} + \vec{T}$$

La velocità minima si avrà quando la tensione del filo sarà nulla. Pertanto scomponendo l'equazione in direzione verticale si avrà:

$$-\frac{mv^2}{R} = -mg$$

Da cui:

$$v = \sqrt{Lg} = 2\frac{m}{s}$$

2b) la rottura del filo avverrà nella posizione in basso dove la tensione del filo è più grande:

$$m\omega^2 R = m\omega^2 L = T_R - mg$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{T_R - mg}{mL}} \cong 10\frac{rad}{s}$$

3a) La forza è data dal gradiente dell'energia potenziale cambiato di segno. Quindi:

$$\vec{f}(x,y) = -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} = Ky\,\hat{\imath} + Kx\,\hat{\jmath}$$

3b) Il lavoro è uguale alla variazione dell'energia potenziale cambiata di segno:

$$L = U_{in} - U_{fin} = -Kx_0y_0 + Kx_1y_1$$

3c) Per calcolare la velocità possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale:

$$T_0 + U_0 = T_1 + U_1$$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}(x_1 y_1 - x_0 y_0)}$$

4a) Il lavoro si calcola applicando la formula generale:

$$L = \int p \cdot dV = A \int_{V_0}^{2V_0} V \cdot dV = \frac{3}{2} A V_0^2$$

Il volume può essere calcolato dall'equazione di stato dei gas perfetti applicato alla trasformazione:

$$pV = AV^2 = nRT$$

da cui:

$$L = \frac{3}{2} A V_0^2 = \frac{3}{2} nRT_0 = 7{,}48\ kJ$$

4b) Dal primo principio della termodinamica:

$$Q = \Delta U + L = nc_v(T_f - T_0) + \frac{3}{2} nRT_0$$

dove:

$$T_f = \frac{A\,(2V_0)^2}{nR} = 4T_0$$

Da cui:

$$Q = nc_v 3T_0 + \frac{3}{2} nRT_0 = 3nT_0\left(c_v + \frac{R}{2}\right) = 3nRT_0\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 9nRT_0 = 44{,}9\ kJ$$

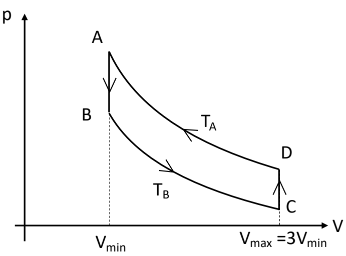
4c) Il calore specifico della trasformazione è definito come:

$$Q = nc_{trasf} \cdot (T_f - T_0) = nc_{trasf} \cdot 3T_0 = n\left(c_v + \frac{R}{2}\right) \cdot 3T_0$$

da cui:

$$c_{trasformazione} = c_v + \frac{R}{2} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) R = 3R = 24{,}9 \frac{J}{mol \cdot K}$$

5a) il ciclo segue l'andamento in figura:



Il lavoro del ciclo è dato solo dalle due trasformazioni isoterme in quanto il lavoro delle trasformazioni isocore è nullo:

$$L_{totale} = L_{BC} + L_{AD} = nR(T_B - T_A) \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} = -2{,}7\ kJ$$

5b) il coefficiente di prestazione della pompa di calore è definito come il calore ceduto alla sorgente calda diviso per il lavoro totale prodotto:

$$CdP_{PdC} = \frac{Q_{ceduto}}{L_{totale}}$$

calcoliamo di calori scambiati:

$$Q_{AB} = n\, c_v(T_B - T_A) < 0$$
$$Q_{CD} = n\, c_v(T_A - T_B) > 0$$
$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_{max}}{V_{min}} > 0$$
$$Q_{DA} = nRT_A \ln \frac{V_{min}}{V_{max}} < 0$$

Quindi:

$$CdP_{PdC} = \frac{Q_{DA} + Q_{AB}}{L_{totale}} = \frac{RT_A \ln \frac{V_{min}}{V_{max}} + \ c_v(T_B - T_A)}{R(T_B - T_A) \ln \frac{V_{max}}{V_{min}}} = \frac{\ln 3 + \frac{3}{2} \cdot 0{,}2}{0{,}2 \cdot \ln 3} = 6{,}4$$