INGEGNERIA AEROSPAZIALE
A.A. 2021/2022

Lezione del 7 Ottobre 2021 – *dott. Occhicone Agostino (agostino.occhicone@uniroma1.it)*
Campo elettrico e Teorema di Gauss

1. Sfera carica con densità $\boldsymbol{\rho(r)}$

   Una sfera di raggio R_1 ha una carica Q distribuita radialmente secondo la funzione $\rho(r) = \rho_0 r$ su tutto il suo volume. La sfera è circondata da un guscio sferico concentrico di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 caratterizzato della stessa funzione densità di carica. Calcola l'andamento del modulo del campo elettrico nelle varie regioni in cui è diviso lo spazio.

Soluzione:

Per caratterizzare l'andamento del campo elettrico, utilizziamo una superficie di Gauss sferica di raggio r (linea rossa tratteggiata in Figura). Lo spazio sarà così suddiviso in più regioni come mostrato in Figura. Consideriamo dapprima la regione di spazio per cui è $0 \leq r < R_1$ e applichiamo il teorema di Gauss:

$$\Phi(\vec{E}, r) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr \tag{1}$$

Dove $Q(r)$ è la carica interna alla sfera di raggio r, mentre l'argomento dell'integrale è la carica, dQ, che si trova sul guscio sferico di spessore dr. Risolvendo l'integrale, si ha:

$$dQ = \rho(r) 4\pi r^2 dr \Longrightarrow Q(r) = \rho_0 \pi r^4 \tag{2}$$

Poiché il campo elettrico è radiale, $\vec{E}$ ed $\hat{n}$ sono sempre paralleli tra loro, quindi:

$$\Phi(\vec{E}, r) = ES = E 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E(r \leq R_1) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2 \tag{3}$$

Pertanto, come si vede dall'Eq. (3), si può dire che il campo ha modulo costante su tutta la superficie gaussiana di raggio r.

Ora passiamo alla regione $R_1 \leq r < R_2$. La sfera carica si comporta come una carica puntiforme $Q_1 = \rho_0 \pi R_1^4$ posta nel centro. Quindi l'Eq. (1) diventa:

$$\Phi(\vec{E}, r) = E 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \pi R_1^4}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E(R_1 \leq r < R_2) = \frac{\rho_0 R_1^4}{4\varepsilon_0 r^2} \tag{4}$$

Consideriamo la regione $R_2 \leq r < R_3$, e di nuovo la distribuzione di carica sarà legata mediante funzione lineare alla coordinata spaziale r. Quindi:

$$dQ = \rho(r) 4\pi r^2 dr \Longrightarrow Q_2(r) = \int_{R_2}^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = \rho_0 \pi (r^4 - R_2^4) \tag{5}$$

Ovvero:

$$Q(r) = Q_1 + Q_2(r) = Q_1 + \rho_0 \pi (r^4 - R_2^4) = \rho_0 \pi (R_1^4 + r^4 - R_2^4) \tag{6}$$

Quindi:

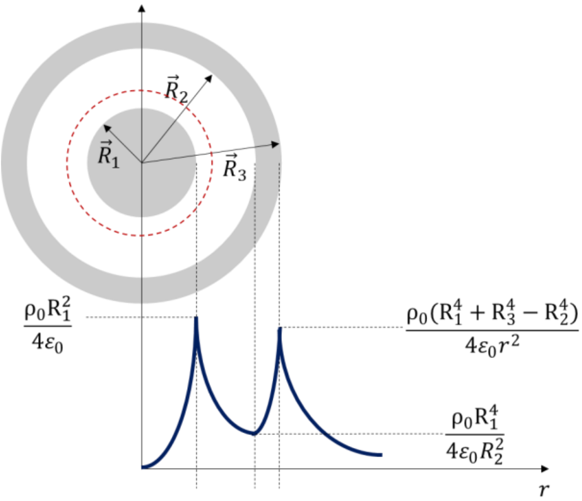
$$E(R_2 \leq r < R_3) = \frac{\rho_0 (R_1^4 + r^4 - R_2^4)}{4\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left(r^2 - \frac{R_2^4 - R_1^4}{r^2} \right) \tag{7}$$

Infine, consideriamo la regione $r > R_3$, qui il campo all'esterno del guscio è dato dalla somma delle cariche sulla sfera e sul guscio. Pertanto, la carica totale interna alla sfera esploratrice di raggio r è pari a:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \rho_0 \pi (R_1^4 + R_3^4 - R_2^4) \tag{8}$$

Quindi

$$E(r > R_3) = \frac{\rho_0 (R_1^4 + R_3^4 - R_2^4)}{4\varepsilon_0 r^2} \tag{9}$$



In figura è riportato lo schema del guscio sferico di raggi R_2 e R_3, che racchiude la sfera di raggio R_1. La linea tratteggiata rappresenta la superficie sferica di Gauss, di raggio r. In basso, è riportato l'andamento qualitativo del modulo del campo elettrico E in funzione della distanza dal centro r.

---

2. Sfera con foro

In una sfera con centro in O_1uniformemente carica con densità di carica ρ è praticato un foro sferico con centro in O_2, all'interno del quale c'è il vuoto. Siano R_1 ed R_2 rispettivamente il raggio della sfera e il raggio del foro. Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto P esterno alla sfera, e in un punto P' interno al foro.

Soluzione:

Sia P un punto esterno alla sfera. Per trovare il campo in questo punto, si sfrutta il principio di sovrapposizione degli effetti. Si consideri il contributo al campo in P fornito dalla sfera piena con distribuzione di carica uniforme ρ e gli sommiamo il contributo di una sfera di centro O_2 e raggio R_2 con carica uniforme $-\rho$:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{10}$$

Troviamo il campo $\vec{E}_1$:

$$\Phi(\vec{E}_1, r_1) = \int_S \vec{E}_1 \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3}{\varepsilon_0} \tag{11}$$

Poiché il campo elettrico è radiale, $\vec{E}$ ed $\hat{n}$ sono sempre paralleli tra loro, quindi:

$$\Phi(\vec{E}_1, r_1) = E_1 S = E_1 4\pi r_1^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_1(r_1) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r_1^2}\hat{r}_1 \tag{12}$$

Analogamente per il campo $\vec{E}_2$:

$$\Phi(\vec{E}_2, r_2) = E_2 S = E_2 4\pi r_2^2 = -\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_2(r_2) = -\frac{\rho R_2^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}\hat{r}_2 \tag{13}$$

Quindi:

$$\vec{E}_P = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r_1^2}\hat{r}_1 - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}\hat{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^3}{r_1^2}\hat{r}_1 - \frac{R_2^3}{r_1^2}\hat{r}_2\right) \tag{14}$$

Sia P' un punto interno al foro praticato nella sfera. Per trovare il campo in questo punto, si sfrutta ancora il principio di sovrapposizione degli effetti come prima. Quindi:

Troviamo il campo $\vec{E}_1$:

$$\Phi(\vec{E}_1, r_1) = \int_S \vec{E}_1 \cdot \hat{n}\, dS = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3}{\varepsilon_0} \tag{15}$$

Poiché il campo elettrico è radiale, $\vec{E}$ ed $\hat{n}$ sono sempre paralleli tra loro, quindi:

$$\Phi(\vec{E}_1, r_1) = E_1 S = E_1 4\pi r_1^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_1(r_1) = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}\hat{r}_1 \tag{16}$$

Analogamente per il campo $\vec{E}_2$:

$$\Phi(\vec{E}_2, r_2) = E_2 S = E_2 4\pi r_2^2 = -\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_2(r_2) = -\frac{\rho r_2}{3\varepsilon_0}\hat{r}_2 \tag{17}$$

Ovvero:

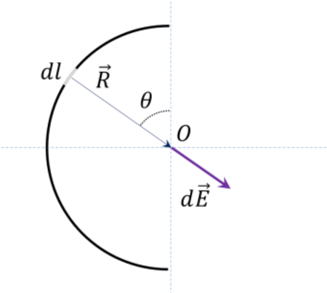
$$\vec{E}_{P'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_1\hat{r}_1 - r_2\hat{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{R} \tag{18}$$

Dove $\vec{R}$ è proprio il raggio vettore che congiunge i centri O_1 e O_2.

---

3. Campo elettrico nell'origine di una semicirconferenza

Un filo sottile e rigido, uniformemente carico con densità di carica lineare λ positiva, è sagomato in modo da formare una semicirconferenza di raggio R e centro O. Ricavare l'espressione, nel vuoto, del campo elettrostatico nel punto O.



Soluzione:

Il campo nel punto O è dato dalla somma del campo generato dai singoli elementi di filo che compongono la semicirconferenza. Il contributo del singolo elemento è dato dalla seguente:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{R^3}\vec{R} \tag{19}$$

Per motivi di simmetria, le componenti lungo l'asse y si annullano e il campo totale coincide con il seguente:

$$E = \int dE_x = \int_l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{R^2}\sin\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\sin\theta \tag{20}$$

Dove $dl = Rd\theta$. Integrando si ha:

$$E = \int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} (-\cos\theta)_0^{\pi} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \tag{21}$$
