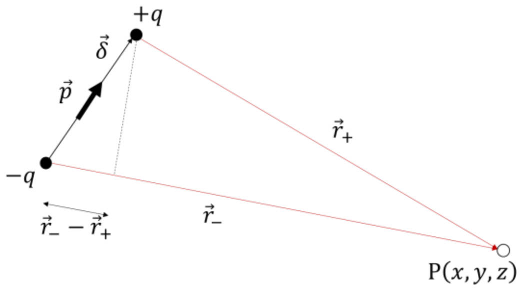
INGEGNERIA AEROSPAZIALE
A.A. 2021/2022

Lezione del 11 Ottobre 2021 – *dott. Occhicone Agostino (agostino.occhicone@uniroma1.it)*
Dipoli elettrici e Teorema di Gauss

1. Azioni meccaniche su dipoli elettrici in un campo elettrico esterno

Richiamo sui dipoli.

$$\vec{p} = q\vec{\delta} \tag{1}$$



Possiamo valutare il potenziale elettrico nel punto P a distanza r tale che $r \gg \delta$:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta\, cos\, \alpha}{r^2} \tag{2}$$

Ovvero:

$$V(P) \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta\, cos\, \alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\, cos\, \alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr\, cos\, \alpha}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{3}$$

In coordinate polari (con $z \parallel \vec{p}$ e $\theta \equiv \alpha$):

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\, cos\, \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr\, cos\, \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{r,\theta,\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\, sin\, \theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \tag{5}$$

Il potenziale elettrico in un punto P può essere espresso dalla seguente:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{r,\theta,\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{6}$$

Mentre il campo elettrico può essere ricavato mediante la seguente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\boldsymbol{\nabla}_{r,\theta,\varphi}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r\, sin\, \theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) \tag{7}$$

Ovvero:

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\, cos\, \theta}{r^2}\right) = -\frac{p\, cos\, \theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2}{r^3}\right) = \frac{p\, cos\, \theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{8}$$

$$E_y = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\, cos\, \theta}{r^2}\right) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-sin\, \theta) = \frac{p\, sin\, \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{9}$$

$$E_z = -\frac{1}{r\, sin\, \theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\, cos\, \theta}{r^2}\right) = 0 \tag{10}$$

Azioni meccaniche su dipoli elettrici in un campo elettrico esterno.

Sia $\vec{p}$ un dipolo rigido immerso in un campo elettrico esterno descritto mediante il potenziale V. Le forze che agiscono sul dipolo sono riportate nel diagramma delle forze in Figura 1.

Se $\vec{E}$ è uniforme, sul dipolo si manifesta una coppia di forze di momento:

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}_A + \vec{r}\times\vec{F}_B = 2\vec{r}\times\vec{F} = \vec{\delta}\times\vec{F} = \vec{\delta}\times q\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E} \tag{11}$$

Mentre la risultante delle forze sarà:

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \tag{12}$$

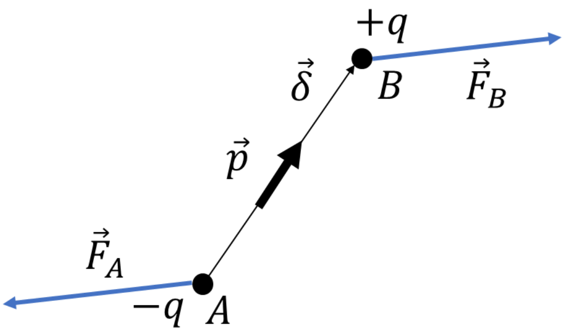


Figura 1. Diagramma delle forze che agiscono su un dipolo immerso in un campo elettrico esterno.

1) Uso sviluppo in serie

Nel caso in cui il campo non sia uniforme, oltre ad una coppia di forze, si manifesta una risultante non nulla della forza. Nell'ipotesi che la distanza δ sia piccola rispetto alle altre distanze in gioco, la risultante delle forze avrà espressione:

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -q\vec{E}(x, y, z) + q\vec{E}(x + dx, y + dy, z + dz); \tag{13}$$

La componente F_x della risultante, a meno di infinitesimi superiori (sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine), avrà la seguente espressione:

$$\begin{aligned} F_x &= qE_x(x + dx, y + dy, z + dz) - qE_x(x, y, z) = q\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz\right] \\ &= q\vec{\delta} \cdot \boldsymbol{\nabla} E_x = \vec{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} E_x; \end{aligned} \tag{14}$$

Dove la funzione $E_x(x + dx, y + dy, z + dz) = E(\vec{r})$ è approssimata al primo ordine dal seguente sviluppo in serie di Taylor valutato nell'intorno di $\vec{r}_0 = (x, y, z)$:

$$E_x(\vec{r}) = E_x(\vec{r}_0) + \boldsymbol{\nabla} E_x(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + o[(\vec{r} - \vec{r}_0)^2] \tag{15}$$

Analogamente per le componenti y e z. Perciò:

$$\begin{aligned} F_y &= \vec{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} E_y; \\ F_z &= \vec{p} \cdot \boldsymbol{\nabla} E_z. \end{aligned} \tag{16}$$

Ovvero:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{\boldsymbol{E}} \tag{17}$$

Dove $(\vec{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})$ indica l'operatore differenziale:

$$(\vec{p} \cdot \boldsymbol{\nabla}) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{18}$$

2) Uso l'energia potenziale U

Allo stesso risultato si giunge considerando il fatto che, trattandosi di forze conservative, esse ammettono una funzione energia potenziale U da cui $\vec{F}$ ed $\vec{M}$ devono essere deducibili se U è nota. U è esprimibile in termini di V, pertanto:

$$U = U_{(-)} + U_{(+)} = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{\delta}) \tag{19}$$

Ponendo $V(\vec{r} + \vec{\delta}) = V(\vec{r}) + dV$, si ha:

$$U = q[-V(\vec{r}) + V(\vec{r} + \vec{\delta})] = q[-V(\vec{r}) + V(\vec{r}) + dV] = qdV \tag{20}$$

Ponendo $d\vec{l} = \vec{\delta}$, possiamo scrivere la seguente:

$$U = qdV = q\boldsymbol{\nabla} V \cdot \vec{\delta} = \boldsymbol{\nabla} V \cdot q\vec{\delta} = \boldsymbol{\nabla} V \cdot \vec{p} = -\vec{E} \cdot \vec{p} \tag{21}$$

Dove si è usata la definizione di potenziale elettrostatico:

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ e } \vec{E} = -\boldsymbol{\nabla} V \Leftrightarrow dV = \boldsymbol{\nabla} V \cdot d\vec{l} \tag{22}$$

Nota l'espressione dell'energia potenziale U, possiamo ricavare la risultante $\vec{F}$ delle forze e il loro momento risultante $\vec{M}$:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} + \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = -dU \tag{23}$$

Ma dU la posso scrivere come di seguito:

$$dU = -dL = \frac{\partial U}{\partial l} dl + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \tag{24}$$

Dove $\frac{\partial U}{\partial l}$ e $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ sono le derivate direzionali lungo $d\vec{l}$ e $d\vec{\theta}$. Per confronto con l'Eq. (23), si ha:

$$\begin{cases} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial U}{\partial l} dl \\ \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = -\dfrac{\partial U}{\partial \theta} d\theta \end{cases} \tag{25}$$

Dall'Eq. (21), si ha:

$$U = -\vec{E} \cdot \vec{p} = -Ep \cos\theta \tag{26}$$

La dipendenza dalla posizione è contenuta solo in E, mentre la dipendenza da θ è solo in $\cos\theta$. Quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial l} dl = (\boldsymbol{\nabla} U)_{\theta = cost} \cdot d\vec{l} = -\boldsymbol{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p}) \cdot d\vec{l} \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} d\theta = \dfrac{\partial(-Ep\cos\theta)}{\partial \theta} d\theta = Ep \sin\theta \, d\theta = (\vec{E} \times \vec{p}) \cdot d\vec{\theta} \end{cases} \tag{27}$$

Per confronto è:

$$\begin{cases} \vec{F} = \boldsymbol{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p}), \quad \vec{p} = cost \\ \vec{M} = -(\vec{E} \times \vec{p}) = \vec{p} \times \vec{E} \end{cases} \tag{28}$$

Sviluppando l'Eq. (28), possiamo trovare le componenti della forza. Ad esempio, la componente F_x può essere valutata così:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{E} \cdot \vec{p}) = \frac{\partial}{\partial x}(E_x p_x + E_y p_y + E_z p_z) = \frac{\partial}{\partial x} E_x p_x + \frac{\partial}{\partial x} E_y p_y + \frac{\partial}{\partial x} E_z p_z \tag{29}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} E_x p_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y p_y + \frac{\partial}{\partial y} E_z p_z \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial z} E_x p_x + \frac{\partial}{\partial z} E_y p_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z p_z \end{aligned} \tag{30}$$

Oppure in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (E_x p_x + E_y p_y + E_y p_y) = \begin{pmatrix} \partial_x(E_x p_x + E_y p_y + E_y p_y) \\ \partial_y(E_x p_x + E_y p_y + E_y p_y) \\ \partial_z(E_x p_x + E_y p_y + E_y p_y) \end{pmatrix} = \vec{F} \tag{31}$$

Sapendo che il campo $\vec{E}$ è conservativo (vedi paragrafo *Rotore di un campo vettoriale. Sviluppi derivanti dalla conservatività del campo elettrostatico* del Mencuccini, Silvestrini), allora:

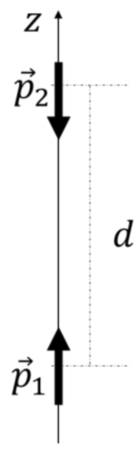
$$\frac{\partial}{\partial y} E_x = \frac{\partial}{\partial x} E_y, \qquad \frac{\partial}{\partial z} E_x = \frac{\partial}{\partial x} E_z, \qquad ecc. \tag{32}$$

Sostituendo nelle Eq. (29) e (30), si ha:

$$\begin{aligned} F_x &= (\vec{p} \cdot \nabla) E_x \\ F_y &= (\vec{p} \cdot \nabla) E_y \\ F_z &= (\vec{p} \cdot \nabla) E_z \end{aligned} \tag{33}$$

Esempio

Un dipolo elettrico di momento $\vec{p}_1 = q_1\vec{\delta}$ è vincolato a mantenere fissa la sua configurazione (posizione e orientamento). Sulla retta individuata da $\vec{p}_1$, e nel suo verso positivo, a distanza $d \gg \delta$, è disposto un secondo dipolo di momento $\vec{p}_2 = q_2\vec{\delta}$. Quest'ultimo è mantenuto in posizione fissa, ma il suo orientamento è libero. Inizialmente, l'orientamento di $\vec{p}_2$ è opposto a quello di $\vec{p}_1$. Quale orientamento raggiunge $\vec{p}_2$ all'equilibrio, e di quanto è variata la sua energia potenziale? A quale risultante $\vec{F}$ è soggetto $\vec{p}_2$ ad opera di $\vec{p}_1$ nella situazione finale?



Sappiamo che:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr\cos\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3} \tag{34}$$

Quindi il campo sarà dato da $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V$:

$$\begin{aligned} E_x &= -\partial_x V = -\partial_x\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{r^5} \\ E_y &= -\partial_y V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3yz}{r^5} \\ E_z &= -\partial_z V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z^2 - r^2}{r^5} \end{aligned} \tag{35}$$

Se $\vec{p}_2 \parallel z$, allora $\theta = 0$, $x = y = 0$ e $z = d$, quindi ($\vec{E} = -\nabla V$):

$$E_x = E_y = 0 \quad E_z = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p_1}{d^3} \tag{36}$$

Inizialmente le componenti del dipolo $\vec{p}_2$ sono:

$$p_{2,x} = p_{2,y} = 0 \quad p_{2,z} = -p_2 \tag{37}$$

E l'energia potenziale iniziale vale:

$$U_{IN} = -\vec{E}\cdot\vec{p} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p_1}{d^3}\cdot(-p_2) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p_1 p_2}{d^3} > 0 \tag{38}$$

All'equilibrio, l'energia potenziale assumerà valore minimo, ovvero quando $\vec{p}_2$ sarà concorde col campo $\vec{E}$. Quindi:

$$p_{2,x} = p_{2,y} = 0 \quad p_{2,z} = p_2 \tag{39}$$

E:

$$U_{FIN} = -\vec{E}\cdot\vec{p} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p_1 p_2}{d^3} < 0 \tag{40}$$

Per una variazione di energia potenziale totale pari a:

$$\Delta U = U_{FIN} - U_{IN} = -\frac{p_1 p_2}{\pi\varepsilon_0 d^3} < 0 \tag{41}$$

Per il calcolo della forza utilizziamo l'Eq. (28). Quindi:

$$\vec{E}\cdot\vec{p}_2 = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^5}[3xz\cdot 0 + 3yz\cdot 0 + (3z^2 - r^2)\cdot p_2] = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}(3z^2 - r^2) \tag{42}$$

Quindi, facendo il gradiente della funzione e calcolando per $x = y = 0$ e $z = d$, si ha:

$$\begin{aligned} F_x &= \partial_x(\vec{E}\cdot\vec{p}_2) = 0 \\ F_y &= \partial_y(\vec{E}\cdot\vec{p}_2) = 0 \\ F_z &= \partial_z(\vec{E}\cdot\vec{p}_2) = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0}\partial_z\left(\frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right) = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 d^4} \end{aligned} \tag{43}$$