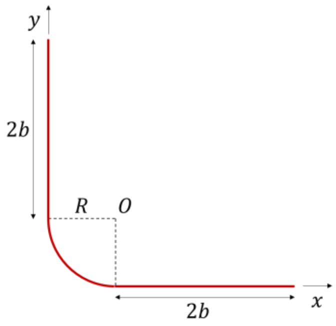
INGEGNERIA AEROSPAZIALE
A.A. 2021/2022

Lezione del 25 Ottobre 2021 – *dott. Occhicone Agostino (agostino.occhicone@uniroma1.it)*
Elettrostatica

1. Filo sottile



Un filo sottile e rigido, uniformemente carico con densità di carica lineare λ positiva, è sagomato in modo da formare due tratti rettilinei di lunghezza 2b ortogonali tra loro e raccordati da un quarto di circonferenza di raggio R, con $R \ll 2b$ e centro O. Ricavare l'espressione, nel vuoto, del campo elettrostatico nel punto O.

Soluzione:

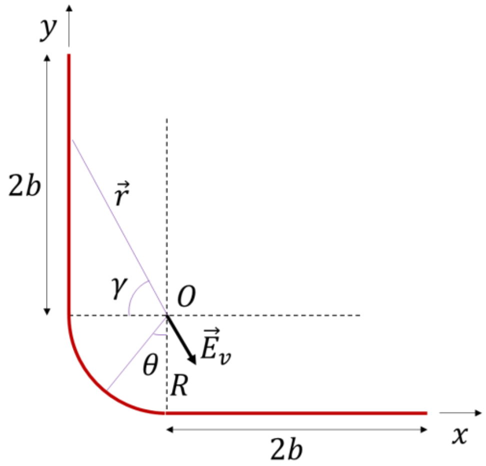
Il campo nel punto O è dato dalla somma del campo generato dalla carica lungo i tratti rettilinei di filo e lungo il tratto curvo, ovvero:

$$\vec{E}_O = \vec{E}_v + \vec{E}_h + \vec{E}_R \tag{1}$$

Cominciamo col trattare il tratto di filo che fa da raccordo:

$$d\vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{R^3}\vec{R} \tag{2}$$

Dove $dl = Rd\theta$ e θ è l'angolo mostrato in figura:



Sfruttando la simmetria del problema, le componenti del campo lungo gli assi avranno la stessa intensità. Pertanto:

$$dE_{R,x} = dE_{R,y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta}{R}\cos\theta \tag{3}$$

Integrando:

$$E_{R,x} = E_{R,y} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{4}$$

Quindi, il modulo del campo sarà:

$$E_R = \left(E_{R,x}^2 + E_{R,y}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{5}$$

Sempre sfruttando la simmetria del problema, si può vedere che il la somma dei campi dei due fili rettilinei fornisce risultante nulla, verifichiamolo.

$$d\vec{E}_{v,h} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^3}\vec{r} \tag{6}$$

Proiettando lungo l'asse x, si ha (contributo del filo verticale):

$$dE_{v,x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2}\cos\gamma \tag{7}$$

Abbiamo che:

$$r = \frac{R}{\cos\gamma} \quad e \quad y = R\tan\gamma \Longrightarrow dy = \frac{R}{\cos^2\gamma}d\gamma \tag{8}$$

Quindi si ha:

$$dE_{v,x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos^2\gamma}{R^2}\frac{R}{\cos^2\gamma}d\gamma\cos\gamma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}d\gamma\cos\gamma \tag{9}$$

Integrando:

$$E_{v,x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{\pi}^{\gamma_v} d\gamma\cos\gamma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}(\sin\gamma)_{\pi}^{\gamma_{max}} > 0 \tag{10}$$

Dove $\gamma_v = \text{atan}\frac{2b}{R}$ ed è $\gamma_v \sim \frac{\pi}{2}$ per $2b \gg R$. Si può ripetere la procedura per la componente y, e si ottiene la seguente:

$$E_{v,y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{\pi}^{\gamma_{max}} d\gamma\sin\gamma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}(-\cos\gamma)_{\pi}^{\gamma_{max}} < 0 \tag{11}$$

Per il filo orizzontale, invece, si ha:

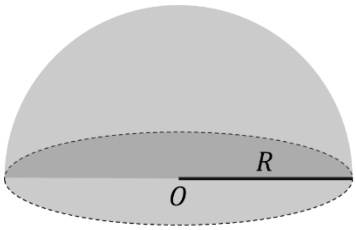
$$E_{h,x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma_{min}} d\gamma\cos\gamma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}(\sin\gamma)_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma_{min}} < 0 \tag{12}$$

$$E_{h,y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma_{min}} d\gamma\sin\gamma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}(-\cos\gamma)_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma_{min}} > 0 \tag{13}$$

Dove $\gamma_{min} = \frac{\pi}{2} + \text{atan}\frac{2b}{R}$ ed è $\gamma_{min} \sim \pi$ per $2b \gg R$.

---

2. Superficie semisferica



Sia dato, nel vuoto, una superficie semisferica di raggio R uniformemente carica con densità superficiale di carica σ. Qual è l'espressione del potenziale e del campo elettrico nel centro O della semisfera?

Soluzione:

Il campo nel punto O è dato dalla somma dei campi generati dai singoli elementi di superficie che costituiscono la semisfera, quindi:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R^3}\vec{R} \tag{14}$$

Dove $dS = R^2 d\theta d\varphi \sin\theta$ e φ e θ sono l'angolo che il vettore $\vec{R}$ forma con l'asse orizzontale nel piano di taglio della semisfera e l'angolo che il vettore $\vec{R}$ forma con l'asse verticale z. Sfruttando la simmetria del problema, si dimostra facilmente che il campo totale ha componente solo lungo z, quindi:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma d\theta d\varphi \sin\theta\cos\theta \tag{15}$$

Integrando, si ha:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sin\theta\cos\theta = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma}{8\pi\varepsilon_0}2\pi = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \tag{16}$$

Il contributo al potenziale elettrico totale in O del singolo elemento di superficie è dato, invece, dalla seguente espressione:

$$dV(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma R\, d\varphi d\theta\, sin\ \theta \tag{17}$$

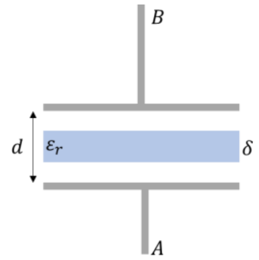
Integrando:

$$V(R) = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, sin\,\theta = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi\,(-cos\,\theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma R}{4\pi\varepsilon_0}2\pi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \tag{18}$$

---

3. Condensatori

Un condensatore piano è isolato ed è costituito da due piastre di sezione S distanti d su cui si trova una carica Q_{lib}. Tra le due piastre viene inserita una lastra omogenea di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 5$ e di spessore $\delta = \frac{d}{4}$. Determinare di quanto diminuisce la differenza di potenziale nel vuoto V_0, e il rapporto tra la carica di polarizzazione Q_{pol} sulla superficie del dielettrico e la carica libera Q_{lib} sulle piastre. (Assumiamo noti S, d e Q_{lib})



Soluzione:

Per calcolare la differenza di potenziale tra le due piastre del condensatore, scelgo un percorso che vada dalla piastra A alla piastra B, ovvero:

$$\begin{aligned} V &= \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_{z_A}^{z_B} E(z)dz \\ &= \int_{z_A}^{z_A+\frac{(d-\delta)}{2}} E(z)dz + \int_{z_A+\frac{(d-\delta)}{2}}^{z_A+\frac{d+\delta}{2}} E(z)dz + \int_{z_A+\frac{(d+\delta)}{2}}^{z_B} E(z)dz \\ &= E_0\frac{(d-\delta)}{2} + E\delta + E_0\frac{(d-\delta)}{2} = E_0(d-\delta) + E\delta \end{aligned} \tag{19}$$

Quindi, per risolvere il problema, ricaviamo l'espressione del campo elettrico nel vuoto e nel dielettrico. Il condensatore è isolato, pertanto la sua carica non cambia con l'inserimento del dielettrico:

$$Q_{lib} = CV_0 \tag{20}$$

Dove:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{21}$$

Il tal caso il campo elettrico nel vuoto non cambia e dipende solo dalla carica libera sulle piastre del condensatore:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{Q_{lib}}{C}d = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0 S} \tag{22}$$

mentre il campo nel dielettrico si riduce:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} \tag{23}$$

Con l'inserimento del dielettrico il potenziale V ai capi del condensatore diventa:

$$\begin{aligned} V &= E_0(d-\delta) + E\delta = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0 S}(d-\delta) + \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}\delta = \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0 S}\left(d-\delta+\frac{\delta}{\varepsilon_r}\right) \\ &= \frac{Q_{lib}}{\varepsilon_0 S}\left(d-\frac{d}{4}+\frac{d}{4\varepsilon_r}\right) = \frac{Q_{lib}d}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4\varepsilon_r}\right) = V_0\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{20}\right) = \frac{4}{5}V_0 \end{aligned} \tag{24}$$

La carica di polarizzazione risulta pari a:

$$Q_{pol} = \sigma_{pol} S = \left(\vec{P} \cdot \hat{n}\right) S = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E S = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} E_0 S = \frac{4}{5} Q_{lib} \tag{25}$$