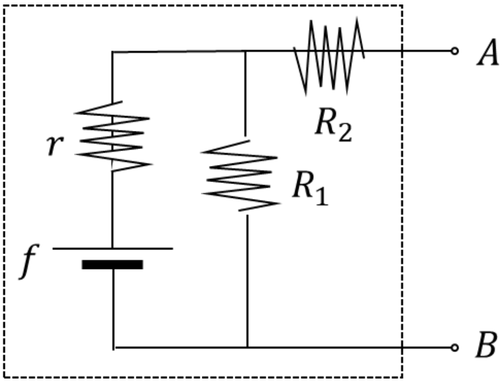
INGEGNERIA AEROSPAZIALE
A.A. 2021/2022

Lezione dello 03 Novembre 2021 – *dott. Occhicone Agostino (agostino.occhicone@uniroma1.it)*
Circuiti RC in continua o in regime quasi stazionario

1. Teorema di Thevenin

Ricavare l'espressione della f.e.m. f_E e della resistenza r_E equivalenti, secondo il *teorema di Thevenin*, al circuito disegnato in figura visto dai morsetti A e B. Valori numerici: $f = 10\,V$, $r = 2\,\Omega$, $R_1 = 10\,\Omega$ e $R_2 = 5\,\Omega$.



Soluzione

Per trovare la f.e.m. equivalente applichiamo il *teormea di Thevenin*:
Data una rete comunque complessa di resistenze e generatori e due punti A e B della rete (morsetti), la rete data equivale a un unico generatore di forza elettromotrice f_E pari alla d.d.p. che si misura tra A e B quando la rete utenza viene staccata, e di resistenza equivalente r_E pari alla resistenza che si misura tra A e B quando ogni generatore venga rimpiazzato da un resistore di resistenza pari alla sua resistenza interna.
Quindi calcoliamo la differenza di potenziale applicata ai morsetti A e B:

$$f_E = V_A - V_B \tag{1}$$

Quindi, muovendoci lungo il circuito, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} V_A &= f - ir \\ V_B &= f - i(r + R_1) \end{aligned} \tag{2}$$

Dove:

$$f - i(r + R_1) = 0 \Rightarrow i = \frac{f}{r + R_1} \tag{3}$$

Quindi:

$$f_E = V_A - V_B = f - ir - f + i(r + R_1) = iR_1 = \frac{f}{r + R_1} R_1 = \frac{10\,V}{12\,\Omega} 10\,\Omega = 8.33\,V \tag{4}$$

Ora rimpiazziamo ciascun generatore della rete con un resistore di resistenza pari alla loro resistenza interna. La resistenza tra A e B sarà data dalla seguente:

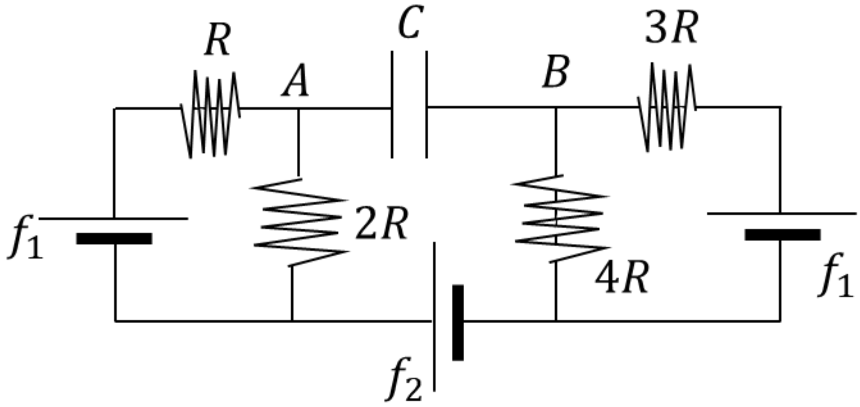
$$r_E = R_2 + \frac{rR_1}{r + R_1} = 5\,\Omega + \frac{20\,\Omega^2}{12\,\Omega} = 6.67\,\Omega \tag{5}$$

Ovvero la resistenza R_2 collegata in serie con il parallelo tra r ed R_1.

---

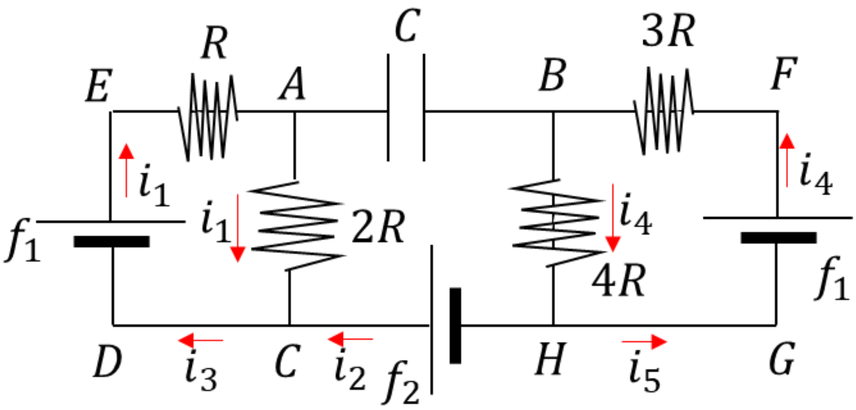
2. Circuito in regime stazionario

Il circuito in figura è in situazione stazionaria. Calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B assumendo $f_1 = 9\,V$ e $f_2 = 2\,V$.



Soluzione

Disegno le correnti che circolano all'interno del circuito come di seguito:



Applico la legge di Ohm generalizzata:

$$V_A - V_B + \sum f_i = \sum IR_i \tag{6}$$

andando da A a B passando per i nodi C ed H, si ha:

$$\Delta V_{AB} - f_2 = i_1 2R - i_4 4R \Leftrightarrow \Delta V_{AB} = f_2 + 2i_1 R - 4i_4 R \tag{7}$$

Alternativamente posso applicare la legge di Ohm generalizzata andando da A a B passando per i nodi E, D, G e F:

$$\Delta V_{AB} - f_1 - f_2 + f_1 = -i_1 R + i_4 3R \Leftrightarrow \Delta V_{AB} = f_2 - i_1 R + i_4 3R \tag{8}$$

Per trovare la differenza di potenziale tra A e B, abbiamo bisogno delle correnti che scorrono nei rami EA e AC (i_1) e nei rami FB e BH (i_4). Quindi applichiamo la legge di Kirchhoff sulla maglia EACD:

$$f_1 - i_1 R - i_1 2R = 0 \Rightarrow 3i_1 R = f_1 \Longrightarrow i_1 = \frac{f_1}{3R} \tag{9}$$

Analogamente nella maglia FBHG:

$$f_1 - i_4 3R - i_4 4R = 0 \Rightarrow 7i_4 R = f_1 \Longrightarrow i_4 = \frac{f_1}{7R} \tag{10}$$

Sostituendo nell'Eq. (7), si ha:

$$\begin{aligned}\Delta V_{AB} &= f_2 + 2\frac{f_1}{3R}R - 4\frac{f_1}{7R}R = f_2 + f_1\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right) = f_2 - \frac{2}{21}f_1 = 2\,V + \frac{2}{21}9\,V \\ &= \frac{20}{7}\,V = 2.86\,V\end{aligned} \tag{11}$$

O, equivalentemente, utilizzando l'Eq. (8):

$$\Delta V_{AB} = f_2 - i_1 R + i_4 3R = f_2 - \frac{f_1}{3R} R + \frac{f_1}{7R} 3R = f_2 + f_1 \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = f_2 + \frac{2}{21} f_1 \quad (12)$$
$$= 2.86\ V$$

---

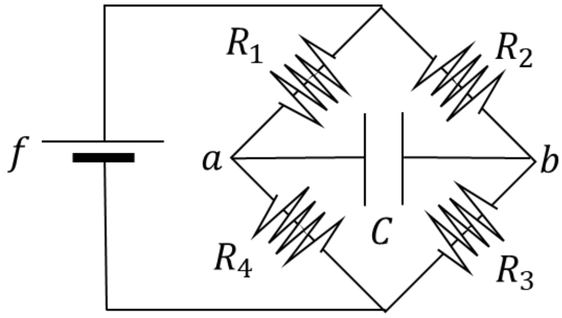
3. Circuito in corrente continua e regime quasi stazionario

Sia dato il circuito di figura. Calcolare:

a. la differenza di potenziale V_C sul condensatore a regime;

b. il tempo t affinché sia $V_C = \frac{V_0}{10}$ dove V_0 è il potenziale sul condensatore a regime.

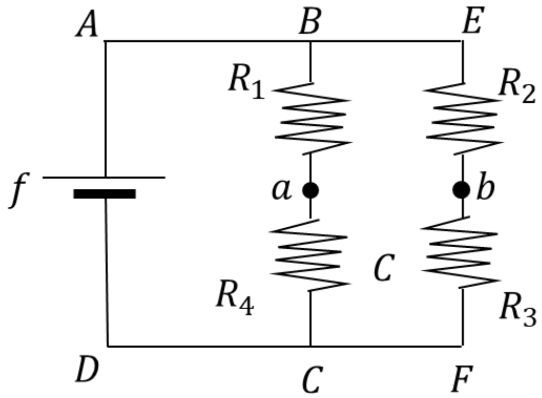
Valori numerici: $f = 10.0\ V$, $R_1 = 1.0\ \Omega$, $R_2 = 8.0\ \Omega$, $R_3 = 2.0\ \Omega$, $R_4 = 4.0\ \Omega$ e $C = 1.0\ \mu F$.



Soluzione

a. Differenza di potenziale V_C sul condensatore a regime.

Per $t \to \infty$ il circuito può essere semplificato in questo modo:



Applico le leggi di Kirchhoff alle maglie per trovare il potenziale in A e in B. Considero la maglia ABCD:

$$V_a = f - i_1 R_1 \quad (13)$$

Mentre per il potenziale in B considero la maglia AEFD:

$$V_b = f - i_2 R_2 \quad (14)$$

Quindi:

$$V_{ba} = V_b - V_a = f - i_2 R_2 - f + i_1 R_1 = i_1 R_1 - i_2 R_2 \quad (15)$$

Per trovare la differenza di potenziale tra A e B, abbiamo bisogno delle correnti che scorrono nei rami BC (i_1) e e EF (i_2). Quindi consideriamo la maglia ABCD:

$$f - i_1 R_1 - i_1 R_4 = 0 \Rightarrow i_1 (R_1 + R_4) = f \Longrightarrow i_1 = \frac{f}{R_1 + R_4} \quad (16)$$

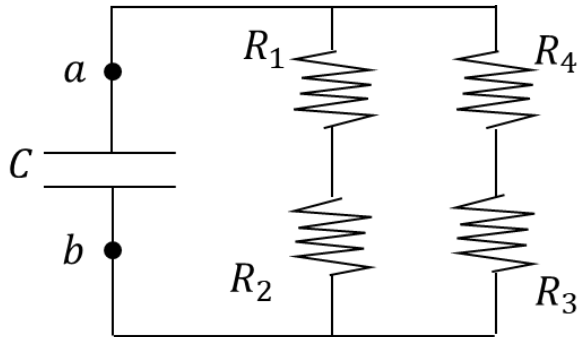
Analogamente nella maglia AEFD:

$$f - i_2 R_2 - i_2 R_3 = 0 \Rightarrow i_2 (R_2 + R_3) = f \Longrightarrow i_2 = \frac{f}{R_2 + R_3} \quad (17)$$

Sostituendo nell'Eq. (15), si ha:

$$V_{ba} = i_1 R_1 - i_2 R_2 = \frac{f R_1}{R_1 + R_4} - \frac{f R_2}{R_2 + R_3} = f\left(\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3}\right)$$
$$= 10.0\,V\left(\frac{1.0}{5.0} - \frac{8.0}{10.0}\right) = 10.0\left(-\frac{6.0}{10.0}\right)\,V = -6.0\,V \tag{18}$$

b. Trovo il tempo t affinché sia $V_C = \frac{V_0}{10}$.
Una volta a regime, stacco il generatore e il nuovo circuito potrà essere schematizzato come di seguito:



Subito dopo lo spegnimento del generatore, su C sarà presente una carica Q e avrà un potenziale V_0. Quindi il condensatore si scaricherà e il suo potenziale nel tempo è espresso mediante un esponenziale decrescente:

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{19}$$

Dove τ è il tempo caratteristico di scarica del condensatore e dipende dalle caratteristiche del circuito:

$$\tau = R_E C \tag{20}$$

Dove R_E è la resistenza equivalente vista ai morsetti a e b:

$$R_E = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \tag{21}$$

Quindi, tornando all'Eq. (19) e imponendo che sia $V(t^*) = \frac{V_0}{10}$, si ha:

$$\frac{V_0}{10} = V_0 e^{-\frac{t^*}{R_E C}} \Leftrightarrow t^* = R_E C \ln 10 \tag{22}$$

Quindi:

$$t^* = R_E C \ln 10 = \frac{54}{15}\,\Omega \cdot 10^{-6}\,F \ln 10 = 8.29 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{C} \frac{C}{V} = 8.29\,\mu s \tag{23}$$
