INGEGNERIA AEROSPAZIALE
A.A. 2021/2022

Lezione dello 02 Dicembre 2021 – *dott. Occhicone Agostino*
(agostino.occhicone@uniroma1.it)
Campo magnetico nei materiali e campi variabili nel tempo

1. Materiali ferromagnetici

Un avvolgimento di $N = 500$ spire percorse dalla corrente $i = 8\,A$, è disposto su di una superficie toroidale circolare di sezione quadrata di area $S = 4\,cm^2$ e lunghezza media $l = 132\,cm$. Lo spazio interno a tale solenoide è completamente riempito della lega ferromagnetica isoperm con $\mu_r = 60$, costante per un largo intervallo di valori di H. Calcolare i valori e i campi B, H e M entro il solenoide. Calcolare inoltre il flusso totale di B, il coefficiente L di autoinduzione, l'energia magnetica e il valore della corrente amperiana nel mezzo ferromagnetico.

Soluzione

Poiché il toro è sottile rispetto alla lunghezza, assumiamo $\vec{H}$, $\vec{B}$ ed $\vec{M}$ costanti nella regione. Dal teorema di Ampere, abbiamo che:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = Ni \Leftrightarrow Hl = Ni \Leftrightarrow H = \frac{Ni}{l} \tag{1}$$

Da cui:

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H \tag{2}$$

Mentre:

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \Rightarrow M = \frac{B}{\mu_0} - H = \mu_r H - H = (\mu_r - 1)H = \chi_m H \tag{3}$$

Ovvero:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{l} = 0.228\,T \tag{4}$$

$$M = (\mu_r - 1)H = (\mu_r - 1)\frac{Ni}{l} = 1.79 \cdot 10^5\,\frac{A}{m} \tag{5}$$

Quindi il flusso del campo induzione magnetica $\vec{B}$ è dato dalla seguente:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = NBS = 4.56 \cdot 10^{-2}\,T \cdot m^2 = 4.56 \cdot 10^{-2}\,Wb \tag{6}$$

Il coefficiente di autoinduzione:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{NBS}{i} = 5.7 \cdot 10^{-3}\,\frac{Wb}{A} = 5.7 \cdot 10^{-3}\,H \tag{7}$$

L'energia magnetica contenuta all''interno dell'induttanza è:

$$U_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi}{i}i^2 = \frac{1}{2}iNBS = 0.18\,T \cdot m^2 \cdot A = 0.18\,J \tag{8}$$

Essendo la magnetizzazione $\vec{M}$ uniforme all'interno del materiale ferromagnetico, le correnti amperiane saranno presenti solo sulla superficie dello stesso, ovvero $\vec{J}_{mv} = 0$. Sapendo che

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} \tag{9}$$

Dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie laterale del materiale. La corrente amperiana è data dalla seguente:

$$i_m = \frac{dQ_m}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \int_l \vec{J}_{ms} \cdot \hat{\jmath}\,dh = \int_l \left(\vec{M} \times \hat{n}\right) \cdot \hat{\jmath}\,dh = Ml = (\mu_r - 1)Ni = 2.4 \cdot 10^5\,A \tag{10}$$

Dove $\hat{\jmath}$ è il versore perpendicolare al tratto $d\vec{h}$ disposto lungo la superficie del materiale attraverso cui voglio valutare la carica microscopica media dQ_m che fluisce nel tempo dt.

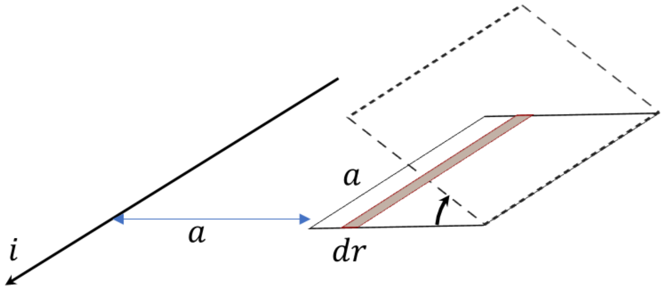
---

2. Induzione magnetica

Una spira quadrata di lato $a = 15\,cm$ e di resistenza $R = 2\,k\Omega$ è in presenza di un lungo filo rettilineo percorso da corrente $i_1(t) = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ con $i_0 = 3\,A$ e $\tau = 10^{-3}\,s$. Inizialmente filo e spira sono complanari, a distanza a, come mostrato in figura.

a) Si calcoli il valore della corrente i_2 indotta nella spira al tempo $t^* = 2 \cdot 10^{-3}\,s$.

b) Raggiunta la situazione stazionaria (per $t \gg \tau$ si ha $i_1 = i_0$ e $i_2 = 0$) alla spira viene fatta compiere una rotazione di un quarto di giro attorno al lato più lontano dal filo. Calcolare la carica che complessivamente fluisce nella spira, orientata come in figura, durante la rotazione.



Soluzione

a) La corrente i_2 indotta nella spira è data dalla seguente:

$$i_2 = \frac{f_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \tag{11}$$

Dal teorema di Ampere si ha:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 i \Leftrightarrow B 2\pi r = \mu_0 i \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{12}$$

Pertanto, il flusso attraverso la spira vale:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 i_1(t) a}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 i_1(t) a}{2\pi} \ln 2 \tag{13}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 i_1(t) a}{2\pi} \ln 2\right] = -\frac{\mu_0 i_0 a}{2\pi R} \ln 2 \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= -\frac{\mu_0 i_0 a}{2\pi R} \ln 2 \left(\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Ovvero:

$$i_2(t^*) = -\frac{\mu_0 i_0 a}{2\pi R} \ln 2 \left(\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) = -4.19 \cdot 10^{-9}\,A \tag{15}$$

b) Per calcolare la carica che scorre nel filo durante la transizione, utilizzo la legge di Felici:

$$q = \frac{\Phi_{in} - \Phi_{fin}}{R} \tag{16}$$

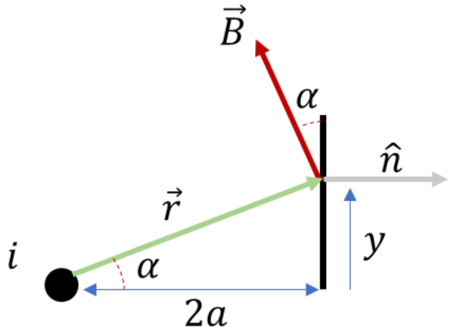
Il flusso iniziale vale:

$$\Phi_{in} = \frac{\mu_0 i_0 a}{2\pi} \ln 2 \tag{17}$$

Mentre quello finale è dato dalla seguente:

$$\Phi_{fin}(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \tag{18}$$

Il sistema, dopo la rotazione della spira, può essere schematizzato in questo modo:



$\vec{B} \cdot \hat{n}$ vale:

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = B\,cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -B\,sin\,\alpha = -B\frac{y}{r} \tag{19}$$

E $dS = ady$. Quindi:

$$\begin{aligned} \Phi_{fin}(\vec{B}) = \int_0^a -B\frac{y}{r}ady = \int_0^a -\frac{\mu_0 i_0}{2\pi r^2}yady = -\frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi}\int_0^a \frac{2y}{4a^2+y^2}dy \\ = -\frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi}[ln\,4a^2+y^2]_0^a = -\frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi}ln\left(\frac{4a^2+a^2}{4a^2}\right) \\ = -\frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi}ln\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{\mu_0 i_0 a}{2\pi}ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

Allora:

$$q = \frac{\mu_0 i_0 a}{2\pi R}\left(ln\,2 + ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = 3.6 \cdot 10^{-11}\ C \tag{21}$$
