INGEGNERIA AEROSPAZIALE

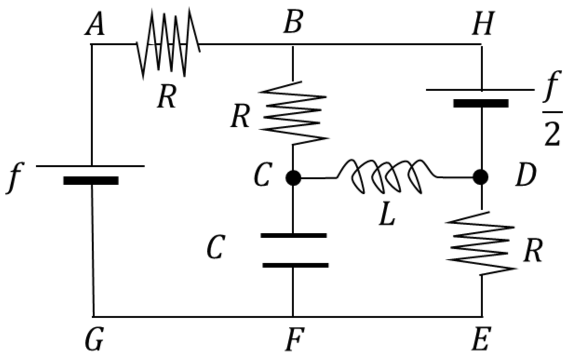
A.A. 2021/2022

Lezione del 15 Dicembre 2021 – *dott. Occhicone Agostino*
(agostino.occhicone@uniroma1.it)

Circuiti RLC

1. Circuiti RLC

Il circuito in figura è in una situazione stazionaria. Calcolare il rapporto $\frac{U_C}{U_L}$ tra le energie possedute dal condensatore e dall'induttanza, assumendo i seguenti valori numerici: $R = 3\ k\Omega$, $C = 2 \cdot 10^{-9}\ F$, $L = 3 \cdot 10^{-6}\ H$.



Soluzione

L'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttanza è data dalle seguenti:

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{1}{2}CV^2 \\ U_L &= \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}L(i_1 - i_2)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

In condizioni stazionarie non scorrono correnti nel ramo del condensatore. Applichiamo la legge di Kirchhoff alla maglia ABCDEFG:

$$f - i_1R - (i_1 - i_2)R - i_1R = 0 \Leftrightarrow f - 3i_1R + i_2R = 0 \tag{2}$$

Applichiamo la legge di Kirchhoff alla maglia HDCB:

$$\frac{f}{2} - (i_1 - i_2)R = 0 \Leftrightarrow i_L = \frac{f}{2R} \tag{3}$$

Allora:

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{1}{2}C(i_1R)^2 \\ U_L &= \frac{1}{2}L\left(\frac{f}{2R}\right)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Quindi:

$$\frac{U_C}{U_L} = \frac{C(i_1R)^2}{L\left(\frac{f}{2R}\right)^2} = \frac{4Ci_1^2R^4}{Lf^2} \tag{5}$$

Trovo i_1:

$$i_1 = \frac{f}{3R} + \frac{i_2}{3} = \frac{f}{3R} - \frac{f}{6R} + \frac{i_1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}i_1 = \frac{f}{6R} \Leftrightarrow i_1 = \frac{f}{4R} \tag{6}$$

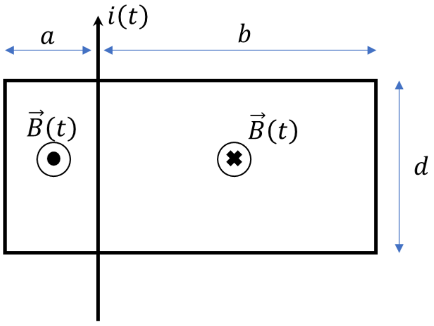
Quindi:

$$\frac{U_C}{U_L} = \frac{4CR^4}{Lf^2} i_1^2 = \frac{4CR^4}{Lf^2} \frac{f^2}{16R^2} = \frac{CR^2}{4L} = 1.5 \cdot 10^{-3} \tag{7}$$

---

2. Induzione magnetica

Una spira rettangolare chiusa di resistenza r è appoggiata su un filo percorso da una corrente di intensità $i(t)$ secondo lo schema mostrato in figura. Si calcoli l'energia dissipata nella spira se la corrente che scorre nel filo aumenta seguendo la legge $i(t) = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Si trascuri l'autoinduzione. Fornire il valore numerico per $r = 5\,\Omega$, $i_0 = 10\,A$, $\tau = 1\,ms$, $b = 3a = 2d = 0.1\,m$



Soluzione

L'energia dissipata dalla spira è data dalla seguente:

$$U_R = \int_0^\infty P dt \tag{8}$$

Dove la potenza P erogata è data dalla seguente:

$$P = I\Delta V = If_i = \frac{f_i^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \tag{9}$$

Calcoliamo il flusso $\Phi = \Phi(\vec{B})$:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int_{-a}^{b} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi x} d\, dx = \frac{\mu_0 i(t) d}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 i(t) d}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{10}$$

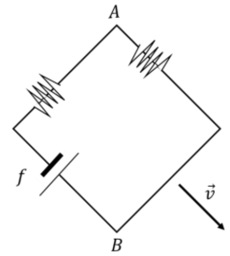
Quindi:

$$\begin{aligned} U_R = \int_0^\infty \frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 dt &= \frac{1}{R}\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 i(t) d}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 d i_0 \cdot ln(3)}{2\pi}\right]^2 \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 d i_0 \cdot ln(3)}{2\pi\tau}\right]^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 d i_0 \cdot ln(3)}{2\pi\tau}\right]^2 \frac{\tau}{2}\left[-e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{R}\left[\frac{\mu_0 d i_0 \cdot ln(3)}{2\pi\tau}\right]^2 \frac{\tau}{2} = 1.2 \cdot 10^{-12}\,J \end{aligned} \tag{11}$$

---

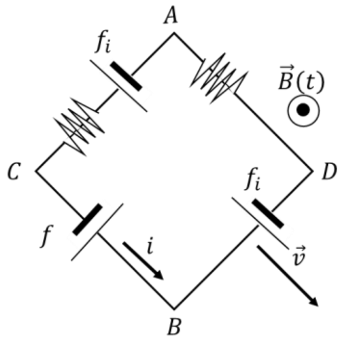
3. Induzione magnetica

Un circuito elettrico ha la forma di un quadrato di lato l secondo lo schema riportato in figura. La spira trasla con velocità costante $\vec{v}$ in una zona dove è presente un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme. Quanto vale f se tra i vertici A e B non c'è differenza di potenziale?



Soluzione

Gli elettroni che si trovano lungo il lato AC sperimentano una forza diretta da C verso A, mentre quelli che si trovano sul ramo CD sono sottoposti ad una forza che va da B verso D. Pertanto, il circuito diventa il seguente:



Applicando la legge di Kirchhoff si ha:

$$f - f_i - iR + f_i - iR = 0 \Leftrightarrow f = 2iR \Rightarrow i = \frac{f}{2R} \tag{12}$$

Inoltre, andando da B ad A ed imponendo $\Delta V_{AB} = 0$, ho:

$$V_B - f_i - iR - V_A = 0 \Leftrightarrow V_B - V_A = f_i + iR = 0 \tag{13}$$

Quindi:

$$V_B - V_A = f_i + \frac{f}{2R}R = 0 \Leftrightarrow f = -2f_i \tag{14}$$

Ma f_i è:

$$|f_i| = \left|(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l}\right| = vBl \Rightarrow f = -2vBl \tag{15}$$

---

4. Circuiti RL

Sia l la lunghezza di un condensatore cilindrico coassiale, a il raggio del filo centrale e b il raggio del tubo. I conduttori sono connessi ad una batteria con una fem V e viene fatta passare una corrente I. Calcolare (a) la capacità per unità di lunghezza del cavo, (b) l'induttanza per unità di lunghezza.

Soluzione

Il sistema cilindrico coassiale, se collegato in modo da formare un circuito mediante una batteria di fem V, funge sia da condensatore che da induttanza. Pertanto, applicando il teorema di Gauss attraverso una superficie coassiale col filo, si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint EdS = E(2\pi rl) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi rl\varepsilon_0} \tag{16}$$

Il flusso è diverso da zero solo sulla superficie laterale della superficie gaussiana. Quindi la capacità del sistema coassiale sarà data dalla seguente:

$$C = \frac{q}{V} \tag{17}$$

Dove V è dato dalla seguente:

$$V = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi r l \varepsilon_0} dr = \frac{q}{2\pi l \varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{18}$$

Quindi:

$$C = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{19}$$

Quindi, la capacità per unità di lunghezza sarà:

(a) $$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{20}$$

L'induzione magnetica tra i conduttori, utilizzando il teorema della circuitazione di Ampere, è:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l'} = \mu_0 I \Rightarrow \oint B dl' = B(2\pi r) = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{21}$$

Dove l' è una circonferenza coassiale col filo di raggio r.
Sappiamo che la densità di energia magnetica u_B è data da:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{22}$$

Quindi l'energia contenuta in un volume di spessore dr è $dV = 2\pi r l dr$, ovvero:

$$dU = u_B dV = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi\mathrm{rldr} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 \frac{\pi\mathrm{rldr}}{\mu_0} = \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} \frac{\pi\mathrm{rldr}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}} \tag{23}$$

Quindi:

$$U = \int dU = \int \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{24}$$

Ma sappiamo che:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \tag{25}$$

Per confronto si ha:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{26}$$

Infine, l'induttanza per unità di distanza è:

(b) $$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{27}$$
