INGEGNERIA AEROSPAZIALE
A.A. 2021/2022

Lezione del 16 Dicembre 2021 – *dott. Occhicone Agostino*
(agostino.occhicone@uniroma1.it)
Equazioni di Maxwell e circuiti in corrente alternata

1. Circuiti RL

Un solenoide cilindrico, di raggio r e lunghezza h, è costituito da N spire ottenuto avvolgendo in modo compatto un filo di rame a sezione circolare di diametro d. Esso è riempito per metà della sua lunghezza con un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_r costante. Calcolare la costante di tempo τ del circuito ottenuto collegando, tramite fili conduttori di resistenza trascurabile, il solenoide ad un generatore di forza elettromotrice costante e resistenza interna R_i. ($r = 1\,cm$, $h = 55\,cm$, $N = 550$, $\rho_{Cu} = 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega \cdot m$, $d = 1\,mm$, $\mu_r = 900$, $R_i = 1.25\,\Omega$)

Soluzione

La costante di tempo τ caratteristica del circuito è data dalla seguente:

$$\tau = \frac{L_{tot}}{R_{tot}} \tag{1}$$

Dove L_{tot} e R_{tot} sono l'induttanza e la resistenza totali del sistema.
Il solenoide è costituito da un filo di rame avvolto in N spire di raggio r. Pertanto, la resistenza del solenoide è pari a:

$$R_{sol} = \rho_{Cu}\frac{l_{filo}}{S_{filo}} = \rho_{Cu}\frac{8\pi r N}{\pi d^2} = \rho_{Cu}\frac{8rN}{d^2} \tag{2}$$

Mentre la resistenza totale del circuito è:

$$R_{tot} = R_{sol} + R_i = \rho_{Cu}\frac{8rN}{d^2} + R_i \tag{3}$$

Contemporaneamente l'induttanza totale del circuito è data dalla somma delle induttanze dei due tratti di solenoide con e senza materiale. Quindi:

$$L_{tot} = L_0 + L \tag{4}$$

Dove è l'induttanza nel solenoide vuoto:

$$L_0 = \frac{\Phi}{i} = \frac{BS}{i} = \frac{\mu_0 n i \left(\frac{N}{2}\right)\pi r^2}{i} = \mu_0\left(\frac{\frac{N}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\left(\frac{N}{2}\right)\pi r^2 = \frac{\mu_0\left(\frac{N}{2}\right)^2\pi r^2}{h/2} \tag{5}$$

Mentre L sarà:

$$L = \mu_r L_0 = \mu\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^2\pi r^2}{h/2} \tag{6}$$

Quindi:

$$\tau = \frac{(1+\mu_r)L_0}{\rho_{Cu}\frac{8rN}{d^2} + R_i} = 0.049\frac{H}{\Omega} = 0.049\,s \tag{7}$$

2. 3° Equazione di Maxwell

In un solenoide cilindrico molto lungo, di raggio $a = 5\,cm$ ed avvolto con $n = 20\frac{spire}{cm}$, circola una corrente sinusoidale $i(t) = I \sin \omega t$, con $I = 10\,A$ e $\omega = 100\,s^{-1}$. Calcolare il valore massimo del campo elettrico a distanza $r = 2\,cm$ dall'asse del solenoide, nell'ipotesi che il solenoide sia posto nel vuoto.

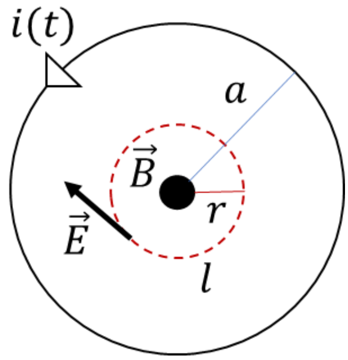
Soluzione

Calcoliamo la circuitazione del campo $\vec{E}$ indotto dalla variazione di flusso del campo magnetico lungo la linea chiusa l di raggio $r = 2\,cm$ (vedi figura), si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \tag{8}$$

Con S la superficie con bordo la linea l. Applicando il teorema del rotore otteniamo la 3° equazione di Maxwell, ovvero:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9}$$



Ovvero:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{dS} = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \tag{10}$$

Essendo $\vec{B}$ sempre parallelo al vettore $\vec{S}$, si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = E(r)2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \tag{11}$$

Quindi ricaviamo il modulo di B mediante il teorema della circuitazione di Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl'} = \mu_0 N i(t) \Leftrightarrow BL = \mu_0 N i(t) \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 N i(t)}{L} = \mu_0 n i(t) \tag{12}$$

Dove L è la lunghezza del solenoide. Quindi si ha:

$$E(r) = -\frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{\partial(\mu_0 n i(t))}{\partial t} = -\frac{\mu_0 n r}{2}\frac{\partial(I \sin \omega t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 n r I \omega}{2} \cos \omega t \tag{13}$$

Il modulo massimo del campo è raggiunto quando $\cos \omega t = 1$, e quindi vale:

$$\begin{aligned} E_{MAX}(r) &= \frac{\mu_0 n r I \omega}{2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{N \cdot s}{C \cdot A} \cdot 20 \cdot 10\,A \cdot \frac{100}{s} = 8\pi \cdot 10^{-3}\frac{N}{C} \\ &= 2.5 \cdot 10^{-2}\frac{V}{m} \end{aligned} \tag{14}$$

---

3. 4° Equazione di Maxwell

Una differenza di potenziale $V(t) = V_0 \sin \omega t$ è applicata tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele, di forma circolare e distanti δ, poste nel vuoto. Ricavare l'espressione del valore massimo del vettore induzione magnetica che si stabilisce internamente al condensatore a distanza r dal suo asse di simmetria.

Soluzione

Sia presa una linea l circolare di raggio r su un piano parallelo alle piastre del condensatore e centrata con l'asse di simmetria del condensatore e si consideri la superficie S di bordo la linea l. Utilizziamo la 4° equazione di Maxwell, si ha:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{15}$$

Quindi calcolando il flusso attraverso la superficie S, si ha:

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{16}$$

In questo caso, le correnti concatenate alla linea sono nulle, ovvero $\vec{J} = 0$. Inoltre, per il teorema del rotore, si ha:

$$\int_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \tag{17}$$

Tenendo conto del fatto che $\vec{E}$ è uniforme su S e che, per la simmetria cilindrica, le linee di forza di $\vec{B}$ sono circonferenze con centro sull'asse del condensatore, si ha:

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE(t)}{dt} \tag{18}$$

E variando nel tempo dà luogo ad una corrente di spostamento che origina il campo $\vec{B}(r, t)$. Inoltre, è $V(t) = E(t)\delta$, quindi è $E(t) = \frac{V(t)}{\delta} = \frac{V_0 \sin \omega t}{\delta}$. Quindi:

$$B(r) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \pi r V_0}{2\delta} \frac{d}{dt} (\sin \omega t) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \pi r V_0 \omega}{2\delta} \cos \omega t \tag{19}$$

Ovvero, B assume valore massimo quando $\cos \omega t = 1$, quindi:

$$B_{MAX} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \pi r V_0 \omega}{2\delta} \tag{20}$$

---

4. Potenza assorbita

Una induttanza, costruita con una bobina avvolta su un nucleo di ferro, ha $L = 0.5\,H$. L'avvolgimento ha inoltre, nel suo complesso, resistenza ohmica pari a $R = 50\,\Omega$. Calcolare il fattore di potenza $\cos \varphi$, e la potenza $\overline{W}$ dissipata nell'induttanza se ad essa è applicata una tensione alternata $F = F_0 \cos \omega t$, con $F_0 = 300\,V$ e $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50\,s^{-1}$.

Soluzione

Sia $F_c = F_0 e^{j\omega t}$, allora la corrente che scorre all'interno della bobina sarà data dalla seguente:

$$F_c(t) = I_c(t) Z_c \Rightarrow I_c(t) = \frac{F_c(t)}{Z_c} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\varphi}} = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \Longrightarrow I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \tag{21}$$

In particolare, abbiamo che:

$$Z_c = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX = R + j\omega L \tag{22}$$

Quindi possiamo ricavare il fattore di potenza mediante la seguente:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \tag{23}$$

Dove l'ampiezza dell'impedenza Z può essere trovata mediante la seguente:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \tag{24}$$

Dunque:

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{50}{\sqrt{2500 + 4\pi^2 \cdot 2500 \cdot 0.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \cdot 0.5^2}} = 0.30 \tag{25}$$

La potenza media, $\overline{W}$, dissipata nell'induttanza la possiamo calcolare a partire dal calcolo della potenza istantanea $W(t)$:

$$\begin{aligned} W(t) = F(t) \cdot I(t) &= F_0 I_0 \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi) \\ &= F_0 I_0 \cos\omega t\,(\cos\omega t \cos\varphi + \sin\omega t \sin\varphi) \\ &= F_0 I_0 \cos^2\omega t \cos\varphi + F_0 I_0 \cos\omega t \sin\omega t \sin\varphi \\ &= F_0 I_0 \cos^2\omega t \cos\varphi + \frac{F_0 I_0}{2} \sin 2\omega t \sin\varphi = P(t) + Q(t) \end{aligned} \tag{26}$$

Dove $\mathrm{P(t)}$ e $Q(t)$ sono rispettivamente potenza reale e potenza reattiva.
Quindi:

$$\overline{W(t)} = \overline{P(t)} + \overline{Q(t)} = \frac{F_0 I_0}{2}\cos\varphi + 0 = \frac{I_0^2 Z}{2}\cos\varphi = \frac{F_0^2}{2Z}\cos\varphi = \frac{F_0^2 \cos\varphi}{2\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{27}$$

Numericamente:

$$\overline{W(t)} = \frac{90000 \cdot 0.30}{2 \cdot 164.8}\ W = 82\ W \tag{28}$$

---

5. Impedenza

Un dispositivo elettrodomestico assorbe una corrente $I_{eff} = 11\ A$ e una potenza media $\overline{W} = 1.8\ kW$ quando è collegato alla rete ($V_{eff} = 220\ V$). Quale è l'impedenza Z del dispositivo? Quale è la sua resistenza R e la sua reattanza X?

Soluzione

L'impedenza del dispositivo può essere calcolata mediante la seguente:

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} = \frac{220\ V}{11\ A} = 20\ \Omega \tag{29}$$

Sappiamo che la potenza media è data dalla seguente:

$$\overline{W} = \overline{P(t)} + \overline{Q(t)} = \frac{V_0 I_0}{2}\cos\varphi = V_{eff} I_{eff} \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\overline{W}}{V_{eff} I_{eff}} \tag{30}$$

Da cui possiamo ricavare la sua resistenza:

$$R = Z\cos\varphi = Z\frac{\overline{W}}{V_{eff} I_{eff}} = 20\ \Omega \cdot \frac{1800\ W}{11 \cdot 220\ W} = 14.8\ \Omega \tag{31}$$

E la sua reattanza:

$$R = Z\sin\varphi = Z\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{400 - 219}\ \Omega = 13.5\ \Omega \tag{32}$$
