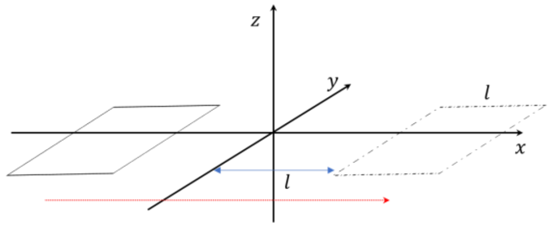
INGEGNERIA AEROSPAZIALE
A.A. 2021/2022

Lezione del 20 Dicembre 2021 – *dott. Occhicone Agostino*
(agostino.occhicone@uniroma1.it)
Correnti indotte, circuiti in corrente alternata e onde EM

1. Correnti indotte

Una spira rigida quadrata di lato l e resistenza R è inizialmente in quiete, nel vuoto, rispetto al riferimento mostrato in figura. Nello spazio è presente un campo magnetico stazionario $\vec{B}$ che nella regione di interesse ha nulle le componenti B_x e B_y, mentre la componente verticale è data da $B_z(x) = a + bx$. A partire da un certo istante la spira viene traslata lungo l'asse x in modo che il suo centro passi da $x = -1.5l$ a $x = +1.5l$. Calcolare la carica Q che circola nella spira, assumendo i seguenti valori numerici: $l = 10\ cm$, $R = 1\ k\Omega$, $a = 0.1\ T$, $b = 0.02\frac{T}{m}$. Si ignorino gli effetti autoinduttivi, che sono comunque non rilevanti.



Soluzione

Se t_0 e t_f indicano rispettivamente l'istante iniziale e finale della traslazione, allora la carica che avrà attraversato la spira può essere calcolata in questo modo:

$$Q = \int_{t_0}^{t_f} i(t)dt \tag{1}$$

In cui $i(t)$ è la corrente indotta all'interno della spira. Tale corrente sarà data dalla seguente:

$$i(t) = \frac{f_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}. \tag{2}$$

Inserendo l'Eq. (2) nella (1), si ha:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_0}^{t_f} -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}dt = \int_{t_0}^{t_f} -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}dt = -\frac{1}{R}\left(\Phi\left(\vec{B}(t_f)\right) - \Phi\left(\vec{B}(t_0)\right)\right) \\ &= \frac{1}{R}\left(\Phi\left(\vec{B}(t_0)\right) - \Phi\left(\vec{B}(t_f)\right)\right) = \frac{1}{R}(\Phi_0 - \Phi_f) \end{aligned} \tag{3}$$

Ovvero la *Legge di Felici*. Quindi, il problema si risolve calcolando il flusso del campo $\vec{B}$ concatenato con la spira nella posizione iniziale e finale. Nella posizione iniziale, si ha:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B_z dS = \int_S B_z dxdy = \int_{-l/2}^{l/2} dy \int_{-2l}^{-l} B_z dx \\ &= \int_{-l/2}^{l/2} dy \int_{-2l}^{-l} (a+bx)dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2}\right]_{-2l}^{-l} \int_{-l/2}^{l/2} dy \\ &= \left[ax + \frac{bx^2}{2}\right]_{-2l}^{-l} (y)_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \left(-al + \frac{bl^2}{2} + 2al - 2bl^2\right)l \\ &= l^2\left(a - \frac{3}{2}bl\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Analogamente, nella posizione finale, si ha:

$$\Phi_f = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B_z dxdy = \int_{-l/2}^{l/2} dy \int_l^{2l} (a+bx)dx = \left[ax + \frac{bx^2}{2}\right]_l^{2l} (y)_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \\ = \left(2al + 2bl^2 - al - \frac{bl^2}{2}\right) l = l^2\left(a + \frac{3}{2}bl\right) \tag{5}$$

Inserendo le espressioni appena trovate per il flusso del campo nell'Eq. (3), si ha:

$$|Q| = \frac{1}{R}|\Phi_0 - \Phi_\mathrm{f}| = \frac{1}{R}\left|l^2\left(a - \frac{3}{2}bl\right) - l^2\left(a + \frac{3}{2}bl\right)\right| = \frac{l^2}{R}\left[\frac{3}{2}bl + \frac{3}{2}bl\right] = \frac{3bl^3}{R} \tag{6}$$

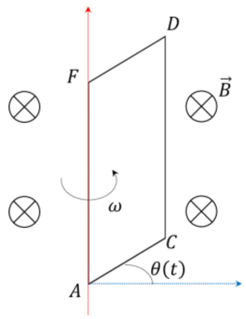
Ovvero:

$$|Q| = \frac{3bl^3}{R} = \frac{3}{1000\,\Omega}\cdot 0.02\frac{T}{m}\cdot(0.1)^3 = \frac{3\,C^2}{1000\,N\cdot m\cdot s}\cdot 0.02\frac{N\cdot s}{C\cdot m^2}\cdot(0.1)^3\,m^3 \\ = 6\cdot 10^{-8}\,C \tag{7}$$

---

2. Correnti indotte

Una spira quadrata ACDF di lato a, fatta di filo metallico omogeneo di sezione costante, ruota uniformemente, nel vuoto, con velocità angolare ω intorno al lato AF, in un campo di induzione uniforme e costante $\vec{B}$, ortogonale al piano della figura; dare l'espressione della ddp V_{CD} tra le estremità del lato CD e darne il valore massimo per $a = 10\,cm$, $\omega = 100\frac{rad}{s}$, $B = 0.8\,T$.



Soluzione

A causa della rotazione della spira, il flusso del campo magnetico $\vec{B}$ concatenato con la spira varia nel tempo e ciò produce, secondo la legge di Faraday-Neumann-Lenz, una forza elettromotrice indotta $i = f_i/R$ dove $R = 4R_l$ (filo omogeneo di sezione costante) è la resistenza della spira e R_l la resistenza del singolo lato. Applicando la legge di Ohm al lato CD si ha:

$$V_{CD} = iR_l = \frac{f_i}{4R_l}R_l = \frac{f_i}{4} \tag{8}$$

Inoltre, è:

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \tag{9}$$

dove $\Phi(\mathrm{\vec{B}})$ è il flusso del campo attraverso la spira ed è funzione del tempo t.

Indichiamo con $\theta(t)$ l'angolo che il piano della spira forma con un qualsiasi piano passante per l'asse di rotazione della spira stessa. Per comodità, si scelga il piano perpendicolare al campo (parallelo al foglio) e come istante iniziale l'istante in cui la spira passa per tale piano, allora tale angolo è anche l'angolo tra il campo $\vec{B}$ e il vettore normale $\vec{n}$ alla superficie della spira orientata concordemente al verso AFDC sulla spira. Quindi si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}dS = \int_S B\cos\theta(t)\,dS = a^2B\cos\theta(t) \tag{10}$$

Quindi:

$$f_i = -\frac{d(a^2B\cos\theta(t))}{dt} = -a^2B\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = a^2B\omega\sin\omega t \tag{11}$$

Dove abbiamo posto $\theta(t) = \omega t$ (moto circolare uniforme).

Quindi risulterebbe:

$$V_{CD} = \frac{f_i}{4} = \frac{a^2B\omega}{4} sin\,\omega t \tag{12}$$

Sebbene il ragionamento possa apparire corretto, la soluzione è ERRATA poiché non si tiene conto della localizzazione della forza elettromotrice.
Per vedere dove è localizzata la forza elettromotrice indotta, dobbiamo calcolare la forza di Lorentz che agisce sulle cariche presenti nella spira. Quindi:

$$f_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{13}$$

Dove L è il perimetro della spira e $\vec{v}$ è la velocità dell'elemento $d\vec{l}$ della spira. Quindi:

$$\begin{aligned} f_i &= \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \int_C^D d\vec{l} = vBa \sin \omega t \\ &= \omega a Ba \sin \omega t = \omega B a^2 \sin \omega t \end{aligned} \tag{14}$$

Che assume lo stesso valore della f_i trovata prima, ma ora sappiamo che è localizzata sul lato CD, essendo fermo il lato AF, che si trova sull'asse di rotazione ($\vec{v} = 0$), mentre i contributi sui lati AC e DF si annullano essendo perpendicolari ai lati della spira. Si ha, quindi:

$$V_D + f_i - iR_l - V_C = 0 \Leftrightarrow \mathrm{V_{CD}} = f_i - \frac{f_i}{4R_l} R_l = \frac{3}{4} f_i = \frac{3}{4} \omega B a^2 \sin \omega t \tag{15}$$

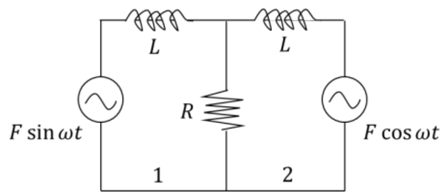
Il valore massimo di V_{CD} si avrà per $sin\, \omega t = 1$, ovvero:

$$V_{CD} = \frac{3}{4} \omega B a^2 = \frac{3}{4} \cdot 100 \frac{rad}{s} \cdot 0.8\, T \cdot 0.1^2\, m^2 = 0.6 \frac{N \cdot s}{C \cdot m} \frac{m^2}{s} = 0.6\, V \tag{16}$$

---

3. Circuiti in corrente alternata

Nella rete in figura, calcolare l'ampiezza I della corrente i che scorre nel resistore R. ($F = 100\, V$, $\omega = 10^3\, rad/s$, $L = 100\, mH$, $R = 100\, \Omega$).



Soluzione

Applicando il metodo simbolico e le leggi di Kirchhoff, possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} F_{C,1} = Z_{C,L} I_{C,1} + Z_{C,R} I_C = j\omega L I_{C,1} + R I_C \\ F_{C,2} = Z_{C,L} I_{C,2} + Z_{C,R} I_C = j\omega L I_{C,2} + R I_C \\ I_C = I_{C,1} + I_{C,2} \end{cases} \tag{17}$$

Da cui, sommando membro a membro, si ha:

$$F_{C,1} + F_{C,2} = j\omega L (I_{C,1} + I_{C,2}) + 2R I_C = (j\omega L + 2R) I_C \tag{18}$$

Da cui ricaviamo I_C:

$$I_C = \frac{F_{C,1} + F_{C,2}}{j\omega L + 2R} \tag{19}$$

Dove possiamo trovare il modulo di I_C come il rapporto tra il modulo del numeratore e il modulo del denominatore, cioè:

$$I = |I_C| = \left| \frac{F_{C,1} + F_{C,2}}{j\omega L + 2R} \right| = \frac{|F_{C,1} + F_{C,2}|}{|j\omega L + 2R|} = \frac{|F_{C,1} + F_{C,2}|}{\sqrt{(\omega L)^2 + 4R^2}} \tag{20}$$

Quindi bisogna calcolare il modulo di $|\mathrm{F_{C,1}} + \mathrm{F_{C,2}}|$. Riscriviamo $\mathrm{F_1}$ secondo il metodo simbolico. Sappiamo che:

$$F_1 = F \sin \omega t = -F \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{21}$$

Ovvero $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Quindi:

$$F_{C,1} = -F \left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = -F e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{22}$$

Analogamente per $\mathrm{F_{C,2}}$:

$$F_2 = F\cos\omega t \Rightarrow F_{C,2} = F[\cos\omega t + j\sin\omega t] = Fe^{j\omega t} \tag{23}$$

Quindi:

$$F_{C,1} + F_{C,2} = -Fe^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} + Fe^{j\omega t} = Fe^{j\omega t}\left[1 - e^{j\frac{\pi}{2}}\right] = Fe^{j\omega t}(1-j) \tag{24}$$

Allora il modulo è:

$$\left|F_{C,1} + F_{C,2}\right| = F\left|e^{j\omega t}\right||1-j| = F\sqrt{2} \tag{25}$$

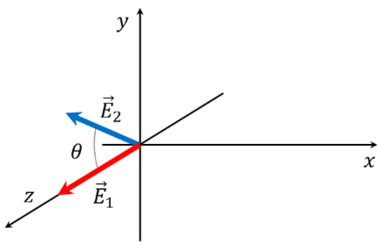
Concludendo:

$$I = \frac{F\sqrt{2}}{\sqrt{(\omega L)^2 + 4R^2}} = \frac{100\,V\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{10^4 + 4\cdot 10^4}\,\Omega} = 0.63\,A \tag{26}$$

---

4. Onde elettromagnetiche

Due onde piane sinusoidali polarizzate linearmente si propagano nel verso positivo dell'asse x ed hanno uguali: la frequenza, la fase iniziale e le intensità medie $\overline{I_0}$. Il campo elettrico $\vec{E}_1$ della prima onda è diretto come l'asse z mentre quello $\vec{E}_2$ della seconda forma con z un angolo θ. Si calcoli l'intensità media totale in un punto qualsiasi dello spazio ($\overline{I_0} = 1\,W/m^2$, $\theta = 45°$).



Soluzione

Il vettore di Poynting è definito come la quantità di energia che attraversa una superficie di dimensione unitaria nell'unità di tempo e può essere calcolato come segue (nel vuoto):

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \left(\vec{B}\times\vec{v}\right)\times\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0}\vec{v} = \varepsilon_0 E^2\vec{v} \tag{27}$$

Ovvero l'intensità istantanea è data da:

$$I_{is} = \varepsilon_0 E^2 v = \frac{E^2}{Z_0} \tag{28}$$

Dove $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ è l'impedenza caratteristica del mezzo in cui si propaga l'onda, nel nostro caso è il vuoto. L'intensità prodotta dalla sovrapposizione di due onde non è uguale alla somma delle intensità, ma sarà dato dalla seguente:

$$\overline{I} = \frac{\overline{E^2}}{Z_0} \tag{29}$$

Dove la media è una media temporale su un intervallo di tempo pari a un periodo dell'onda $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{T}\int_0^T E^2(t)dt = \frac{1}{2}E_M^2 \tag{30}$$

Dove E_M è il valore massimo assunto dal campo elettrico. Essendo il campo elettrico associato alle due onde nel piano yz, allora:

$$\overline{I} = \frac{\overline{E_y^2 + E_z^2}}{Z_0} = \frac{\overline{\left(E_{1,y} + E_{2,y}\right)^2 + \left(E_{1,z} + E_{2,z}\right)^2}}{Z_0} \tag{31}$$

Come riportato nel testo dell'esercizio, queste sono le componenti dei campi elettrici delle due onde:

$$\begin{aligned} E_{1,y} &= 0 & E_{1,z} &= A\sin(kx - \omega t) \\ E_{2,y} &= A\sin(kx-\omega t)\sin\theta & E_{2,z} &= A\sin(kx-\omega t)\cos\theta \end{aligned} \tag{32}$$

Ovvero, il campo totale avrà le seguenti componenti:

$$\begin{gathered} E_y = A\sin(kx-\omega t)\sin\theta \\ E_z = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx-\omega t)\cos\theta = A\sin(kx-\omega t)\,(1+\cos\theta) \end{gathered} \tag{33}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{\overline{E_{2,y}^2 + E_{1,z}^2 + E_{2,z}^2 + 2E_{1,z}E_{2,z}}}{Z_0} = \frac{1}{Z_0}\left(\overline{E_{2,y}^2} + \overline{E_{1,z}^2} + \overline{E_{2,z}^2} + 2\overline{E_{1,z}E_{2,z}}\right) \\ &= \frac{1}{Z_0}\left(\frac{A^2\sin^2\theta}{2} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2\cos^2\theta}{2} + \frac{2A^2\cos\theta}{2}\right) \\ &= \frac{A^2}{2Z_0}(2 + 2\cos\theta) = 2\overline{I_0}(1+\cos\theta)\end{aligned} \tag{34}$$

Dove $\overline{I_0} = \frac{\mathrm{A}^2}{2\mathrm{Z}_0}$ è proprio l'intensità media comune alle due onde, dove:

$$\begin{aligned}\overline{E_1^2} = \overline{E_2^2} &= \frac{1}{T}\int_0^T E_1^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2(kx-\omega t)\,dt = \frac{A^2}{T}\int_{kx}^{kx-2\pi} -\frac{1}{\omega}\sin^2\xi\,d\xi \\ &= -\frac{A^2}{2\pi}\int_{kx}^{kx-2\pi}\sin^2\xi\,d\xi = -\frac{A^2}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\sin\xi\cos\xi + \frac{1}{2}\xi\right]_{kx}^{kx-2\pi} \\ &= -\frac{A^2}{2\pi}\left(\frac{1}{2}(kx-2\pi-kx)\right) = \frac{A^2}{2\pi}\frac{1}{2}2\pi = \frac{A^2}{2} = \overline{I_0}\end{aligned} \tag{35}$$

Quindi:

$$\bar{I} = 2\overline{I_0}(1+\cos\theta) = 2\cdot 1\,\frac{W}{m^2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3.41\ \frac{W}{m^2} \tag{36}$$