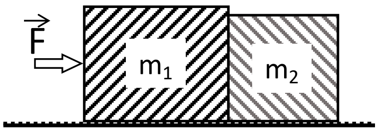
Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

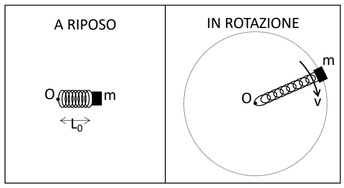
1 febbraio 2022 – prova scritta di Fisica 1

1) Due blocchi di masse rispettivamente m_1 = 2 kg e m_2 = 1 kg sono appoggiati su di un piano orizzontale scabro (μ_d=0.2) a contatto uno con l'altro. Una forza orizzontale F di 6 N è applicata sul blocco di massa m_1 come in figura. Determinare:



a) l'accelerazione con cui si muovono i due blocchi;
b) la forza di mutua interazione che si esercita tra di essi durante il moto;
c) dare una spiegazione a parole del perché la forza di mutua interazione non dipende dall'attrito.

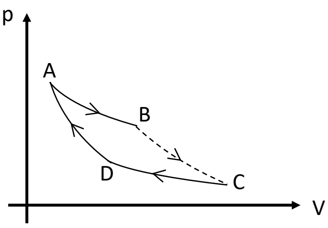
2) Su un piano orizzontale liscio, una molla (di costante elastica k e lunghezza a riposo L_0) è collegata da un lato ad un corpo di massa m e dall'altro a un vincolo O che le permette di ruotare senza attrito. La massa ruota alla velocità v costante intorno al punto O. Determinare l'allungamento della molla.



3) Una palla omogenea di massa M e raggio R si trova sulla sommità di un piano scabro, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, ad una altezza h. Partendo da fermo inizia a rotolare senza strisciare lungo il piano.

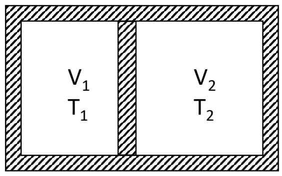
a) calcolare la velocità del centro di massa della palla alla fine del piano inclinato;
b) se qui fosse presente una molla di costante elastica k, di quanto la contrarrebbe?

4) Una macchina termica esegue il ciclo indicato in figura, dove la trasformazione AB è isoterma reversibile alla temperatura T_1=500K, BC è adiabatica irreversibile, CD è isoterma reversibile alla temperatura T_2=200K e DA adiabatica reversibile. Il fluido termodinamico è costituito da 1 mole di gas perfetto monoatomico. Sapendo che V_B/V_A=2 e che V_C/V_D=2,3, calcolare:



a) il calore scambiato con l'esterno nel ciclo;
b) il rendimento della macchina termica;
c) il rendimento della macchina di Carnot operante tra le sorgenti termiche alle stesse temperature.

5) Il recipiente in figura, impermeabile al calore, è diviso in due scomparti da un setto scorrevole (di volume trascurabile), anch'esso impermeabile al calore. Inizialmente in ciascuno dei due scomparti si trovano n = 2 moli di un gas ideale monoatomico alle temperature T_1 = 300 K e T_2 = 400 K. Si conosce il volume totale del recipiente V = 10 l.



a) Determinare i volumi iniziali occupati dai due gas.
b) Se si permettesse al calore di passare spontaneamente attraverso il setto, quanto varrebbe la temperatura finale di equilibrio del sistema?

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio

1 febbraio 2022 – soluzioni scritto di Fisica 1

1a) Le forze che agiscono sulla massa 1 sono:

$$\vec{P}_1 + \vec{F} + \vec{R}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{A}_1 = m_1\vec{a}$$

mentre le forze sul corpo 2 sono:

$$\vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{A}_2 = m_2\vec{a}$$

Le accelerazioni sono state poste uguali perché i corpi si muovono insieme, all'unisono.
Scomponendo i due bilanci delle forze nella direzione verticale ed orizzontale si ottiene:

$$y: \quad \begin{cases} R_1 = P_1 \\ R_2 = P_2 \end{cases}$$

$$x: \quad \begin{cases} m_1 a = F - F_{12} - A_{d1} \\ m_2 a = F_{21} - A_{d2} \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} A_{d1} = \mu_d R_1 = \mu_d m_1 g \\ A_{d2} = \mu_d R_2 = \mu_d m_2 g \end{cases}$$

dal sistema in x si può calcolare l'accelerazione sommando membro a membro e ricordando che, per il terzo principio della dinamica:

$$F_{12} = F_{21}$$

$$a = \frac{F - A_{d1} - A_{d2}}{m_1 + m_2} = \frac{F - \mu_d g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = 0{,}04\frac{m}{s^2}$$

1b) sempre dal sistema in x si può calcolare la forza scambiata:

$$a = \frac{F - F_{12} - A_{d1}}{m_1} = \frac{F_{21} - A_{d2}}{m_2}$$

da cui:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}F = \frac{1}{2+1}6 = 2\ N$$

2) Nel moto del corpo, circolare uniforme, l'accelerazione centripeta è data dalla forza elastica:

$$ma_c = -m\frac{v^2}{x + L_0} = -kx$$

da cui

$$mv^2 = kx(x + L_0) = kx^2 + kL_0x$$

Questa equazione di secondo grado ammette le soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{-kL_0 \pm \sqrt{(kL_0)^2 + 4km^2v^4}}{2k}$$

Si scarta la soluzione negativa e quindi:

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_0^2 + 4\frac{m^2v^4}{k}} - L_0\right)$$

3a) Il momento d'inerzia di una sfera omogenea è:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Sfruttando la conservazione dell'energia meccanica:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove, per la condizione di rotolamento puro:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Sostituendo si ricava v:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

3b) Essendo la forza elastica conservativa possiamo ancora sfruttare la conservazione dell'energia meccanica totale:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = \sqrt{\frac{2Mgh}{k}}$$

4a) Lungo le due trasformazioni adiabatiche la macchina non scambia calore con l'esterno. Quindi:

$$Q_{AB} = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} > 0$$

$$Q_{CD} = nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C} < 0$$

$$Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{CD} = nR\left(T_1 \ln\frac{V_B}{V_A} - T_2 \ln\frac{V_C}{V_D}\right) = 1496\,J$$

4b) Conoscendo i calori scambiati possiamo calcolare il rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{[Q_{CD}]}{Q_{AB}} = 1 - \frac{T_2 \ln\frac{V_C}{V_D}}{T_1 \ln\frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{\ln(2{,}3)\ T_2}{\ln(2)\ T_1} = 0{,}52$$

4c) Il rendimento dell'equivalente macchina di Carnot è:

$$\eta = 1 - \frac{[Q_{CD}]}{Q_{AB}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}6$$

Come si vede, il rendimento della macchina di Carnot è maggiore del rendimento di una macchina irreversibile simile.

5a) Sfruttando la funzione di stato dei gas perfetti si ha:

$$\begin{cases} pV_1 = nRT_1 \\ pV_2 = nRT_2 \\ V_1 + V_2 = V_{tot} \end{cases}$$

dove le pressioni dei due volumi sono state poste uguali perché il setto scorrevole è fermo, in equilibrio.
Risolvendo il sistema si ottiene:

$$V_1 = \frac{T_1}{T_1 + T_2}V \cong 4{,}3\ l$$

$$V_2 = V_{tot} - V_1 \cong 5{,}7\ l$$

5b) Nel secondo caso il calore fluisce dalla parte B a quella A ma non si ha scambio di calore con l'esterno. Questo significa che, essendo il sistema totale isolato, la sua energia interna (somma delle energie interne dei due sistemi) deve restare costante:

$$\begin{cases} U_{IN} = nc_vT_1 + nc_vT_2 \\ U_{FIN} = nc_vT_{eq} + nc_vT_{eq} = 2nc_vT_{eq} \\ U_{IN} = U_{FIN} \end{cases}$$

da cui risolvendo:

$$T_{eq} = \frac{T_1 + T_2}{2} = 350K$$