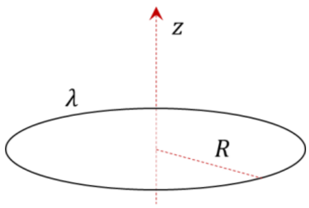
INGEGNERIA AEROSPAZIALE A.A. 2021/2022

Esercitazione del 12 Gennaio 2022

dott. Occhicone Agostino (agostino.occhicone@uniroma1.it)

1. *Elettrostatica*

Calcolare le espressioni del potenziale elettrostatico e del campo elettrico sull'asse di una distribuzione di cariche (nel vuoto) di forma circolare di raggio R e densità lineare λ, verificandone il corretto comportamento all'infinito ($z \gg R$). Calcolare i valori numerici del potenziale e del campo al centro della distribuzione per $\lambda = 1.6 \times 10^{-11} \frac{C}{m}$.



Soluzione

Il potenziale elettrostatico in un generico punto P sull'asse della distribuzione di carica circolare può essere calcolato mediante la seguente:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda}{r} dl = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{Rd\theta}{r} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 r} 2\pi = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = V(z) \tag{1}$$

Dove l è la linea su cui è distribuita la carica uniforme ed $r = \sqrt{R^2+z^2}$ la distanza del generico elemento dl dal punto P.

Il campo $\vec{E}$ si può calcolare in questo modo:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{2}$$

Ovvero:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

Pertanto, per $z \gg R$, si ha:

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} \simeq \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 z} \longrightarrow 0 \; per \; z \to \infty \tag{4}$$

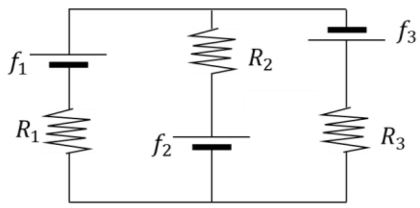
Per $z = 0$:

$$V(0) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} = \frac{1.6\times 10^{-11}}{2\cdot 8.85\times 10^{-12}}\frac{C}{m}\frac{N\cdot m^2}{C^2} = 0.9\,V \tag{5}$$

$$E_z(z=0) = 0$$

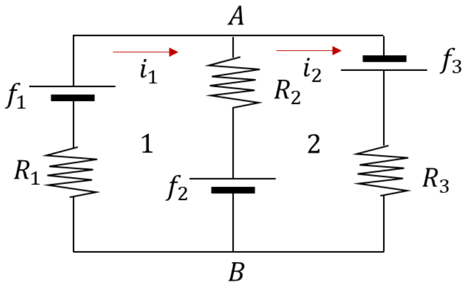
2. *Circuiti elettrici*

Nel circuito mostrato in figura si ha: $f_1 = 10\,V$, $f_2 = 20\,V$, $f_3 = 30\,V$, $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$. Trascurando la resistenza interna dei generatori, calcolare il valore dell'intensità di corrente che passa per la resistenza R_1.



Soluzione

Applichiamo le leggi di Kirchhoff e assumiamo il circuito attraversato dalle seguenti correnti:



Quindi scriviamo le equazioni delle maglie 1 e 2 come di seguito:

$$\begin{aligned} 1&: f_1 - f_2 = (i_1 - i_2)R_2 + i_1R_1 \\ 2&: f_2 + f_3 = (i_2 - i_1)R_2 + i_2R_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Dove si è tenuto conto del fatto che la corrente che scorre nella resistenza R_2 è dato da $|i_1 - i_2|$. Quindi:

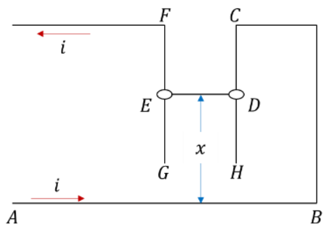
$$\begin{aligned} 1&: f_1 - f_2 = i_1(R_1 + R_2) - i_2R_2 \\ 2&: f_2 + f_3 = -i_1R_2 + i_2(R_2 + R_3) \end{aligned} \tag{2}$$

Che risolvendo mediante la regola di Cramer, si ha:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{\begin{vmatrix} f_1 - f_2 & -R_2 \\ f_2 + f_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{(f_1 - f_2)(R_2 + R_3) + R_2(f_2 + f_3)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2} = \frac{f_1R_2 + f_1R_3 - f_2R_3 + f_3R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \\ &= \frac{2000 + 3000 - 6000 + 6000}{20000 + 30000 + 60000}\, A = \frac{5}{110}\, A = 45.5\, mA \end{aligned} \tag{3}$$

3. Forza di Lorentz

Il circuito in figura percorso da una corrente continua i è disposto in un piano verticale. Il tratto DE di conduttore di lunghezza l e massa m può scorrere liberamente sulle guide FG e CH. Determinare la quota di equilibrio x di ED rispetto ad AB supponendo che le azioni magnetiche che si esercitano su DE siano dovute esclusivamente al tratto AB del circuito (da considerare infinitamente lungo). Dare il valore numerico per $i = 50\, A$, $l = 1\, m$, $m = 1\, g$.



Soluzione

Sul tratto ED agisce il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ generato dal filo AB che è dato dalla seguente (campo generato da un filo infinito, tratto AB, percorso da corrente):

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \tag{1}$$

Ne segue che la forza di Lorentz che agisce su ED è:

$$\vec{F}_L = i\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F_L = ilB \tag{2}$$

Ed è rivolta verso l'alto. Quindi, equilibrando con la forza peso, si ha:

$$F_L = P \Leftrightarrow ilB = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi x} = mg \tag{3}$$

Ovvero:

$$x = \frac{\mu_0 i^2 l}{2\pi mg} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\frac{T \cdot m}{A} \cdot \frac{2500\, A^2 \cdot 1\, m}{10^{-3}\, kg \cdot 9.81\, \frac{m}{s^2}} = 0.05\, \frac{N \cdot s \cdot m}{C \cdot m}\frac{A \cdot m}{N} = 5\, cm \tag{4}$$

4. fem indotta

Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente $I = 1\,A$. Una spira quadrata, di lato $l = 10\,cm$ e resistenza elettrica $R = 5\,\Omega$, giace inizialmente su un piano contenente il filo rettilineo con due suoi lati paralleli al filo stesso. Il più vicino di tali lati dista $d = 20\,cm$ dal filo. Attorno a tale lato la spira viene fatta ruotare di $180°$. Calcolare la carica totale che percorre la spira.

Soluzione

Uso la legge di Felici, quindi:

$$Q = \frac{1}{R}\left|\Phi_i - \Phi_f\right| \tag{1}$$

Quindi trovo il flusso del campo attraverso la spira prima della rotazione:

$$\Phi_i = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S BdS = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} ln\left(\frac{d+l}{d}\right) \tag{2}$$

Essendo $\vec{B}$ e $d\vec{S}$ paralleli e concordi. Analogamente, dopo la rotazione della spira:

$$\Phi_f = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S BdS = -\int_{d-l}^{d} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = -\frac{\mu_0 I l}{2\pi} ln\left(\frac{d}{d-l}\right) \tag{3}$$

Questa volta, dopo la rotazione, $\vec{B}$ e $d\vec{S}$ continuano ad essere paralleli ma il loro verso sarà discorde.
Concludendo:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{R}\left|\frac{\mu_0 I l}{2\pi} ln\left(\frac{d+l}{d}\right) + \frac{\mu_0 I l}{2\pi} ln\left(\frac{d}{d-l}\right)\right| = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R}\left|ln\left(\frac{d+l}{d}\right) + ln\left(\frac{d}{d-l}\right)\right| \\ &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi R}\left|ln\left(\frac{d+l}{d-l}\right)\right| = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R} ln\left(\frac{d+l}{d-l}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\mu_0 I l}{2\pi R} ln\left(\frac{d+l}{d-l}\right) = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\frac{T\cdot m}{A}\frac{1\,A\cdot 0.1\,m}{5\,\Omega} ln(3) = 4.4\cdot 10^{-9}\frac{N\cdot s\cdot m\cdot A\cdot m}{C\cdot m\cdot \frac{N}{C}\cdot m} \\ &= 4.4\cdot 10^{-9}\,C \end{aligned} \tag{5}$$