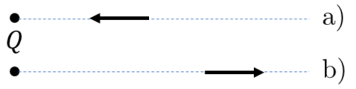
INGEGNERIA AEROSPAZIALE A.A. 2021/2022

Esercitazione del 13 Gennaio 2022

dott. Occhicone Agostino (agostino.occhicone@uniroma1.it)

1. Elettrostatica



Un dipolo elettrico si trova nel campo generato da una carica puntiforme positiva Q a distanza R con il proprio momento $\vec{p}$ rivolto verso Q (figura *a*). Calcolare il lavoro compiuto dalle forze del campo quando il dipolo passa nella posizione di figura *b* a distanza $2R$ da Q col suo momento ruotato di $180°$ rispetto al caso *a*. ($Q = 16\,\mu C$, $R = 5\,cm$, $p = 5 \times 10^{-9}\,C \cdot m$).

Soluzione

Il problema si risolve calcolando l'energia (potenziale) del sistema prima e dopo la transizione, considerando le forze che agiscono (forze elettrostatiche) di tipo conservativo. La differenza di energia tra i due stati, allora, ci fornirà il lavoro compiuto dalla carica Q, ossia:

$$L = U_a - U_b \tag{1}$$

L'energia potenziale di un dipolo immerso in un campo elettrico è data dalla seguente:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} U_a &= -\vec{p} \cdot \vec{E}(R) = -pE(R)\cos\pi = pE(R) = \frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \\ U_b &= -\vec{p} \cdot \vec{E}(2R) = -pE(2R)\cos 0 = -pE(2R) = -\frac{pQ}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Dove abbiamo utilizzato la seguente espressione del campo elettrico radiale (sorgente puntiforme):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \tag{4}$$

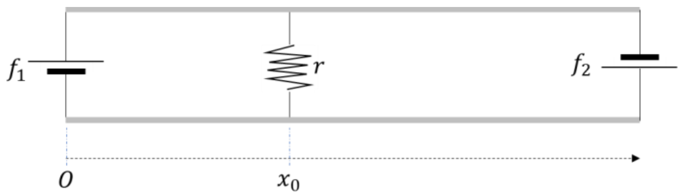
Quindi, utilizzando l'Eq. (1), si ha:

$$L = \frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{pQ}{16\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5pQ}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \tag{5}$$

Numericamente:

$$L = \frac{5pQ}{16\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{5 \cdot 5 \times 10^{-9}\,C \cdot m \cdot 16 \times 10^{-6}\,C}{16 \cdot \pi \cdot 8.85 \times 10^{-12}\frac{C^2}{N \cdot m^2} \cdot 25 \times 10^{-4}\,m^2} = 0.36\,J \tag{6}$$

2. Circuiti elettrici



Nella rete in figura i generatori di f.e.m. f_1 e f_2 sono collegati al carico r attraverso due conduttori di filo omogeneo di lunghezza l. Si chiede per quale distanza x_0 del carico dal generatore di f.e.m. f_1 la corrente nel carico è nulla. ($f_1 = 10\,V$, $f_2 = 30\,V$, $l = 80\,cm$).

Soluzione

Osservando la figura, la resistenza delle parti di filo appartenenti alle due maglie possono essere calcolate in questo modo:

$$R_1 = \rho \frac{x_0}{S} \quad R_2 = \rho \frac{(l - x_0)}{S} \tag{1}$$

Quindi utilizziamo la legge di Kirchhoff per le maglie e la applichiamo alle due maglie che compongono il circuito, abbiamo:

$$\begin{aligned} &1)\ f_1 = 2i_1R_1 + (i_1 - i_2)r \\ &2)\ f_2 = 2i_2R_2 + (i_2 - i_1)r \end{aligned} \tag{2}$$

Per la legge di Kirchhoff ai nodi, vale la seguente:

$$i_1 - i_2 = 0 \Leftrightarrow i_1 = i_2 = i \tag{3}$$

Quindi:

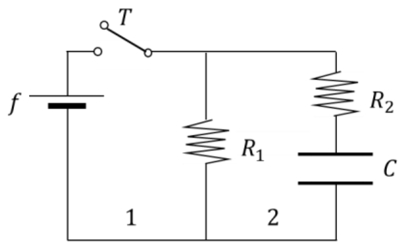
$$\begin{aligned} &1)\ f_1 = 2i_1R_1 = 2i\rho \frac{x_0}{S} \\ &2)\ f_2 = 2i_2R_2 = 2i\rho \frac{(l - x_0)}{S} \end{aligned} \tag{4}$$

Facendo il rapporto tra le due, si ha:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{x_0}{S} \cdot \frac{S}{l - x_0} = \frac{x_0}{l - x_0} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} l = x_0 \left(1 + \frac{f_1}{f_2}\right) \Leftrightarrow x_0 = \frac{f_1}{f_2 + f_1} l = \frac{10}{40} \cdot 80\ cm = 20\ cm \tag{5}$$

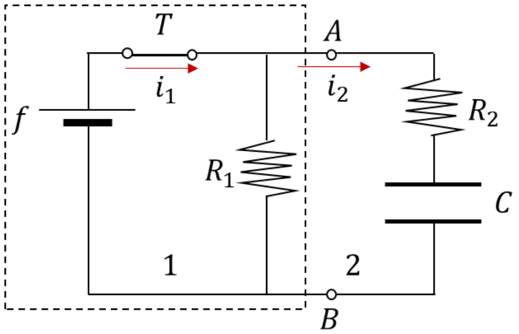
3. Circuiti in condizioni quasi stazionarie

Un generatore di tensione continua f.e.m. e di resistenza interna trascurabile alimenta il circuito in figura. Calcolare l'energia E_g erogata dal generatore dall'istante $(t_0 = 0)$ in cui viene chiuso l'interruttore T all'istante $t' = 6R_2C$. Il condensatore all'istante t_0 è scarico. $(R_1 = 200\ \Omega,\ R_2 = 100\ \Omega,\ C = 0.1\ \mu F,\ f = 100\ V)$



Soluzione

All'istante t_0, l'interruttore T viene chiuso e si ha:



L'energia erogata dal generatore E_g è data dalla seguente:

$$E_g = \int_{t_0}^{t'} i^2 R_1 dt + \int_{t_0}^{t'} i_2^2 R_2 dt + U_C(t') = \int_0^{t'} (i_1 - i_2)^2 R_1 dt + \int_0^{t'} i_2^2 R_2 dt + U_C(t') \tag{1}$$

Applicando il teorema di Thevenin, si ha che il circuito può essere semplificato mediante un generatore equivalente, f_E, collegato in serie ad una resistenza equivalente r_E. Ovvero, si ottiene:

$$f_E = f \quad r_E = 0 \tag{2}$$

Pertanto, il circuito si riduce ad un circuito RC, dove si ha la carica del condensatore C in serie alla resistenza R_2. Ne risulta:

$$V(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{dove } \tau = R_2C,\ \ V_0 = f \tag{3}$$

Quindi utilizziamo la legge di Kirchhoff per le maglie e la applichiamo alla maglia interna (f, R_1) e alla maglia esterna (f, R_2, C) del circuito:

$$\begin{matrix} 1)\, f = i_1R_1 - i_2R_1 \\ 2)\, f = i_2R_2 + V(t) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1)\, i_1 = \dfrac{f}{R_1}\left(\dfrac{R_2 + R_1e^{-\frac{t}{\tau}}}{R_2}\right) \\ 2)\, i_2 = \dfrac{f}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{matrix} \tag{4}$$

Quindi riprendiamo l'Eq. (1) e si ha:

$$\begin{aligned} E_g &= \int_0^{t'} (i_1 - i_2)^2 R_1 dt + \int_0^{t'} i_2^2 R_2 dt + \frac{1}{2}Cf^2\left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) \\ &= \int_0^{t'} (i_1^2 + i_2^2 - 2i_1i_2)R_1 dt + \int_0^{t'} i_2^2 R_2 dt + \frac{1}{2}Cf^2\left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) \\ &= \int_0^{t'} i_1^2 R_1 dt + \int_0^{t'} i_2^2 R_1 dt - 2\int_0^{t'} i_1 i_2 R_1 dt + \int_0^{t'} i_2^2 R_2 dt + \frac{1}{2}Cf^2\left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Risolvendo gli integrali e trascurando i termini esponenziali per $t' = 6\tau$, si ha:

$$E_g \simeq Cf^2\left(1 + 6\frac{R_2}{R_1}\right) = 10^{-7}\,F \cdot 10^4\,V^2\,\left(1 + \frac{600}{200}\right) = 4 \times 10^{-3}\,J = 4\,mJ \tag{6}$$

4. f.e.m. indotta

Un campo magnetico uniforme varia armonicamente nel tempo con frequenza ν. Nel campo è immersa una spira piana conduttrice di area S, il cui piano forma un angolo α con la direzione del campo. Nella spira è indotta una f.e.m. f_i di valore massimo F_M. Si determini il valore massimo B_M del vettore induzione magnetica del campo. ($\nu = 10\,kHz$, $S = 100\,cm^2$, $\alpha = 30°$, $F_M = 5\,V$).

Soluzione

Il campo di induzione magnetica può essere espresso mediante la seguente:

$$B(t) = B_M \sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

Dove $\omega = 2\pi\nu$.

La f_i, invece, può essere calcolata dalla seguente:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2}$$

Dove il flusso Φ del campo induzione magnetica attraverso la superficie con bordo la spira è espressa dalla seguente:

$$\Phi = \int_S \vec{B}(t) \cdot \hat{n} dS = \int_S B(t) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) dS = B(t) S \sin\alpha \tag{3}$$

Da cui:

$$f_i = -\frac{d}{dt}(B(t)S\sin\alpha) = -S\sin\alpha\frac{d}{dt}(B_M\sin(\omega t + \varphi)) = -\omega S B_M \sin\alpha\cos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

Essendo:

$$F_M = f_{i,max} \tag{5}$$

Si ha:

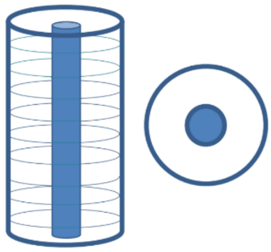
$$F_M = \omega S B_M \sin\alpha \tag{6}$$

Da cui:

$$B_M = \frac{F_M}{\omega S \sin\alpha} = \frac{F_M}{2\pi\nu S\sin\alpha} = \frac{F_M}{\pi\nu S} = \frac{5\,V}{10^4\,Hz \cdot \pi \cdot 10^{-2}\,m^2} = 1.59 \cdot 10^{-2}\,T \tag{7}$$

5. *f.e.m. indotta*

Si consideri un solenoide di raggio a molto lungo con n spire per unità di lunghezza in cui circola una corrente variabile nel tempo secondo la legge $i(t) = I_m[1 - e^{-t/\tau}]$. All'interno del solenoide è posizionato un cilindro coassiale di $b < a$ di materiale dielettrico omogeneo e isotropo con costante dielettrica ε_r. Ricavare l'espressione del vettore intensità di polarizzazione $\vec{P}$ e la densità di carica σ_P sulla superficie laterale del cilindro dielettrico, durante il transitorio.



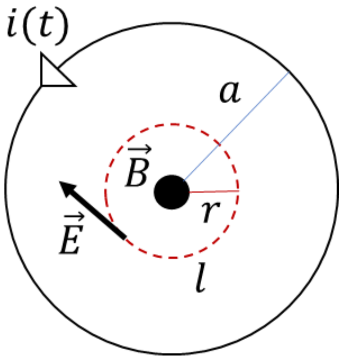
Soluzione

Calcoliamo la circuitazione del campo $\vec{E}$ indotto dalla variazione di flusso del campo magnetico lungo la linea chiusa l di raggio r (vedi figura), si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \tag{1}$$

Con S la superficie con bordo la linea l. Applicando il teorema del rotore otteniamo la 3° equazione di Maxwell, ovvero:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$



Ovvero:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{dS} = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \tag{3}$$

Essendo $\vec{B}$ sempre parallelo al vettore $\vec{S}$, si ha:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = E(r)2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \tag{4}$$

Quindi ricaviamo il modulo di B mediante il teorema della circuitazione di Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl}' = \mu_0 N i(t) \Leftrightarrow BL = \mu_0 N i(t) \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 N i(t)}{L} = \mu_0 n i(t) \tag{5}$$

Quindi:

$$E(r)2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial(\mu_0 n i(t))}{\partial t} = -\frac{\pi r^2 \mu_0 n I_m}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6}$$

Sul bordo del dielettrico di raggio $r = b$, il campo assume il valore seguente:

$$E(b) = -\frac{b\mu_0 n I_m}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

Applicando la condizione all'interfaccia tra dielettrico e vuoto, si ha:

$$E_{t1} = E_{t2} \Leftrightarrow E(b^-) = E(b^+) \tag{8}$$

Essendo il campo elettrico tangenziale. Quindi, il vettore di intensità di polarizzazione può essere espresso dalla seguente:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E} \tag{9}$$

Mentre la densità di carica di polarizzazione è data dalla seguente:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} = 0 \tag{10}$$

Essendo $\vec{P}$ e $\hat{n}$ rispettivamente parallelo e perpendicolare all'interfaccia dielettrico/vuoto.