INGEGNERIA AEROSPAZIALE A.A. 2021/2022

Esercitazione del 17 Gennaio 2022

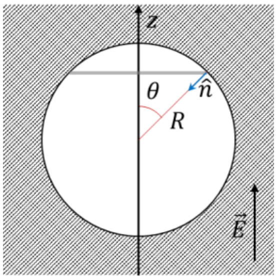
dott. Occhicone Agostino (agostino.occhicone@uniroma1.it)

1. *Elettrostatica*

In un mezzo dielettrico di costante relativa ε_r esiste un campo elettrico uniforme $\vec{E}$. Il mezzo contiene una cavità sferica. Trovare il campo elettrico $\overrightarrow{E'}$ al centro della cavità prodotto dalle cariche indotte sulla superficie della sfera supponendo che il vettore di polarizzazione $\vec{P}$ sia costante ovunque, eccetto che nella cavità. ($\varepsilon_r = 3$, $E = 12\,\frac{N}{C}$)

Soluzione

Il sistema si presenta come in figura qui di seguito:



Il vettore intensità di polarizzazione è dato dalla seguente:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \tag{1}$$

Se $\hat{n}$ è il versore della normale alla superficie interna della cavità, allora la densità delle cariche di polarizzazione sulla superficie è data dalla seguente:

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\,cos(\pi - \theta) = -P\,cos\,\theta = \sigma_P(\theta) \tag{2}$$

Dove θ è l'angolo polare rispetto alla direzione di polarizzazione z (vedi figura). Si noti che la distribuzione di carica non è uniforme e, in particolare, al polo nord ($\theta = 0$) si ha un accumulo di cariche negative, al polo sud ($\theta = \pi$) si ha un accumulo di cariche positive, mentre all'equatore la densità di carica è nulla.

Il campo elettrico al centro della sfera può essere calcolato come di seguito:

$$\overrightarrow{E'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_P dS}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_P dS}{R^2}\hat{r} \tag{3}$$

Essendo $r = R$ costante. Nel nostro caso possiamo ipotizzare, però, che per una corona sferica compresa tra θ e $\theta + d\theta$ la densità di carica sia costante, quindi:

$$dQ = \sigma_P(\theta)dS = -P\,cos\,\theta\,2\pi rRd\theta = -2\pi P\,cos\,\theta\,R\,sin\,\theta\,Rd\theta = -2\pi PR^2\,cos\,\theta\,sin\,\theta\,d\theta \tag{4}$$

Inoltre, per simmetria, il campo totale $\overrightarrow{E'}$ è diretto come l'asse polare z, per cui risulta conveniente calcolare la sua componente lungo l'asse, ovvero:

$$dE' = \overrightarrow{dE'}\cdot\hat{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_P dS}{R^2}\hat{r}\cdot\hat{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_P dS}{R^2}cos(\pi - \theta) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_P dS}{R^2}cos\,\theta \tag{5}$$

Quindi:

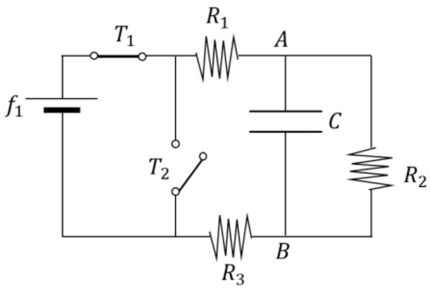
$$
\begin{aligned}
E' &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_P dS}{R^2}\cos\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{-2\pi P R^2\cos\theta\sin\theta\, d\theta}{R^2}\cos\theta \\
&= \frac{P}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \\
&= -\frac{(\varepsilon_r-1)E}{2}\int_1^{-1} t^2 dt = -\frac{(\varepsilon_r-1)E}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} = \frac{(\varepsilon_r-1)E}{3}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Dove abbiamo risolto l'integrale per sostituzione ponendo $t = \cos\theta$.
Numericamente si ha:

$$
E' = \frac{(\varepsilon_r-1)E}{3} = \frac{2}{3}12\frac{N}{C} = 8\frac{N}{C} \tag{7}
$$

2. Circuiti elettrici

Il circuito schematizzato in figura, in cui T_1 e T_2 rappresentano degli interruttori ed f un generatore a resistenza interna trascurabile, inizialmente è sistemato in modo che T_1 sia chiuso e T_2 sia aperto. Una volta raggiunta la situazione di regime, ad un certo istante assumibile come origine dei tempi, T_1 viene aperto e T_2 chiuso. Ricavare, per $t > 0$, l'espressione della funzione $Q(t)$ che rappresenta la scarica del condensatore al generico istante t.

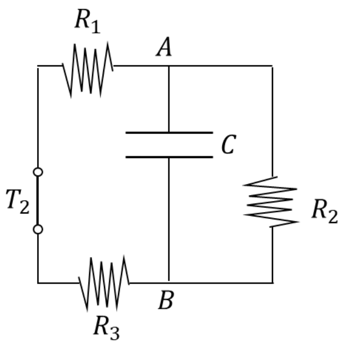


Soluzione

Al tempo $t = 0$, l'interruttore T_2 viene chiuso e l'interruttore T_1 viene aperto determinando la scarica del condensatore secondo la seguente legge:

$$
Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{1}
$$

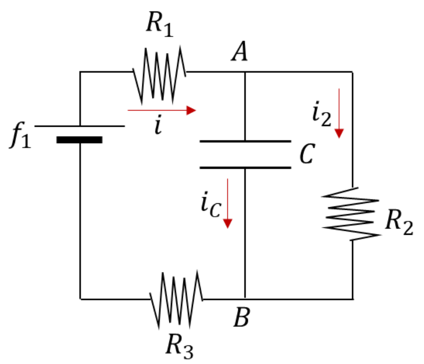
Dove Q_0 rappresenta la carica che il condensatore aveva per $t = 0$ e $\tau = R_E C$ la costante di tempo del circuito a tempi $t > 0$, ovvero del seguente circuito:



Quindi il condensatore si scarica attraverso la resistenza equivalente R_E data dal parallelo tra la serie R_1 e R_3 e la resistenza R_2, ovvero:

$$
\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1+R_3} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1+R_2+R_3}{R_2(R_1+R_3)} \Leftrightarrow R_E = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \tag{2}
$$

Infine, per trovare la carica iniziale del condensatore, dobbiamo considerare il circuito a tempi $t < 0$, ovvero:



Dal circuito disegnato si può facilmente vedere che per tempi molto lunghi (condizione di regime) la corrente che scorre nel condensatore, i_C, è nulla. Pertanto, diventa $i_2 = i$ ed è data dalla seguente:

$$i = \frac{f}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{3}$$

E la tensione ai capi del condensatore è proprio uguale alla caduta di tensione sulla resistenza R_2, quindi:

$$V_{AB} = \frac{fR_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{4}$$

Da cui:

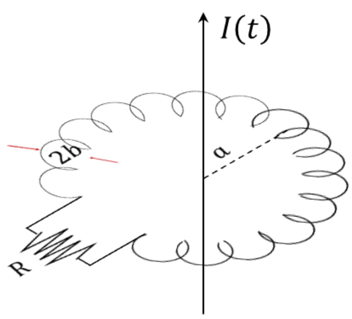
$$Q_0 = \frac{CfR_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{5}$$

In conclusione:

$$Q = \frac{CfR_2}{R_1 + R_2 + R_3} e^{-\frac{t}{R_E C}} \tag{6}$$

3. *Circuiti RL*

Un conduttore rettilineo indefinito è percorso da una corrente impulsiva $I(t)$ del tipo: $I = 0$ per $t < 0$, $I = kt$ per $t > 0$, k costante. Intorno al conduttore, in modo del tutto simmetrico, è disposto un avvolgimento toroidale di N spire, raggio maggiore a e raggio minore $b \ll a$, chiuso su una resistenza R (come in figura). Calcolare l'andamento della tensione $v(t)$ ai capi della resistenza R e darne un'espressione approssimata valida per $t \ll \frac{L}{R}$.



Soluzione

Dato il circuito in figura, per effetto della f.e.m. indotta f_i, scorrerà una corrente indotta $i(t)$. Pertanto, la tensione $v(t)$ ai capi della resistenza sarà la seguente:

$$v(t) = Ri(t) = f_i(t) \tag{1}$$

Consideriamo il circuito toroidale, la f_i sarà data dalla sovrapposizione degli effetti di induzione dovuta al filo rettilineo (mutua induzione) e dalla autoinduzione del solenoide. Quindi:

$$f_i(t) = -M\frac{dI(t)}{dt} - L\frac{di(t)}{dt} = Ri(t) \tag{2}$$

Ovvero una equazione differenziale del primo ordine:

$$-Mk = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \Leftrightarrow \frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt} + i(t) = -\frac{Mk}{R} \tag{3}$$

la cui soluzione è la seguente

$$i(t) = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{4}$$

Dove $i_0 = -\frac{\mathrm{Mk}}{\mathrm{R}}$ e $\tau = \frac{L}{R}$.

Nota:

la formula risolutiva dell'equazione differenziale

$$y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t) \tag{5}$$

è la seguente:

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[c + \int g(t)e^{A(t)}dt\right] \quad dove \quad A(t) = \int a_o(t)dt \tag{6}$$

Per cui:

$$v(t) = Ri(t) = i_0R\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -Mk\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = v_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{7}$$

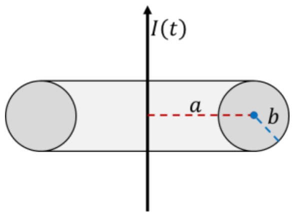
Per $t_0 \ll \tau$, possiamo sviluppare in serie e, approssimando al primo ordine, si ha:

$$v(t_0 \ll \tau) \simeq v(t_0) + \dot{v}(t_0)(t - t_0) = \frac{v_0}{\tau}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)_{t=t_0}(t - t_0) = \frac{v_0}{\tau}t = -\frac{Mk}{L}Rt = -\frac{MR}{L}I(t) \tag{8}$$

Quindi non ci resta che calcolare i coefficienti di mutua e auto induzione del circuito. Per trovare il coefficiente di mutua induzione M, consideriamo la seguente:

$$f_i^M = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -M\frac{dI(t)}{dt} \tag{9}$$

Consideriamo il seguente sistema:



Calcoliamo il flusso del campo concatenato al filo attraverso gli avvolgimenti del solenoide, si ha:

$$\Phi_M = \int_S \overrightarrow{B_M} \cdot \hat{n}dS = B_M N\pi b^2 \tag{10}$$

Questa è vera nell'ipotesi in cui $b \ll a$ (possiamo considerare costante il campo all'interno di ciascun avvolgimento del solenoide). Il modulo del campo è dato dalla seguente:

$$\int_l \overrightarrow{B_M} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I(t) \Leftrightarrow B_M 2\pi a = \mu_0 I(t) \Leftrightarrow B_M = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a} \tag{11}$$

Quindi si ha:

$$\Phi_M = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi a}N\pi b^2 = \frac{\mu_0 N b^2 I(t)}{2a} \tag{12}$$

Inserendo l'Eq. (12) che abbiamo appena ricavato nell'Eq. (9), si ha:

$$-\frac{\mu_0 N b^2}{2a}\frac{dI(t)}{dt} = -M\frac{dI(t)}{dt} \Leftrightarrow M = \frac{\mu_0 N b^2}{2a} \tag{13}$$

Analogamente per trovare il coefficiente di autoinduzione L:

$$f_i^L = -\frac{d\Phi_L}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt} \tag{14}$$

Quindi:

$$\Phi_L = \int_S \overrightarrow{B_L} \cdot \hat{n}dS = B_L N\pi b^2 \tag{15}$$

Mentre il campo nel solenoide è dato dalla seguente:

$$\int_h \overrightarrow{B_L} \cdot \overrightarrow{dh} = \mu_0 N i(t) \Leftrightarrow B_L 2\pi a = \mu_0 N i(t) \Leftrightarrow B_L = \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi a} \tag{16}$$

Quindi, per confronto, si ricava:

$$L \frac{di(t)}{dt} = N\pi b^2 \frac{\mu_0 N}{2\pi a} \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow L = \frac{\mu_0 N^2 b^2}{2a} \tag{17}$$

Inserendo i coefficienti che abbiamo ricavato nell'Eq. (8), si ha:

$$v(t_0 \ll \tau) \simeq -\frac{\mu_0 N b^2}{2a} \frac{2a}{\mu_0 N^2 b^2} RI(t) = -\frac{R}{N} I(t) \tag{18}$$

4. Onde elettromagnetiche

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente si propaga nel vuoto nel verso positivo dell'asse x di un opportuno riferimento. All'istante $t = 0$, il campo elettrico dell'onda ha l'espressione $E(x, 0) = Ae^{-x^2/a^2}$, con A e a costanti. Un'asticciola conduttrice di lunghezza l è disposta in modo da formare un angolo θ con il vettore campo elettrico dell'onda ad un'ascissa D. Si calcoli la f.e.m. nell'asticciola all'istante t^*. ($A = 1\frac{V}{m}$, $a = 400\ m$, $l = 1\ m$, $D = 1\ km$, $t^* = 2\ \mu s$, $\theta = 30°$)

Soluzione

Per trovare la f.e.m. indotta, conviene partire dalla sua espressione in termini del campo elettrico $\vec{E}$ associato all'onda, cioè:

$$f_i = \int_{l_{antenna}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \tag{1}$$

Scelto un sistema di riferimento con l'asse x nella direzione di propagazione dell'onda, il campo elettrico giace nel piano yz e la sua componente nel piano è del tipo:

$$E(x, t) = Ae^{-\frac{(x-ct)^2}{a^2}} \tag{2}$$

Poiché propaga nel verso positivo dell'asse x. Ponendo $x = D$ e $t = t^*$, diventa:

$$E^*(D, t^*) = Ae^{-\frac{(D-ct^*)^2}{a^2}} \tag{3}$$

Tornando all'Eq. (1), si ha:

$$f_i^* = \int_{l_{antenna}} \vec{E}^*(D, t) \cdot \vec{dl} = \int_{l_{antenna}} E^*(D, t) dl \cos\theta = lE^*(D, t)\cos\theta = lAe^{-\frac{(D-ct^*)^2}{a^2}} \cos\theta \tag{4}$$

Inserendo i valori numerici, si ha:

$$f_i^* = \frac{\sqrt{3} lA}{2e} = \frac{\sqrt{3}}{2e}\ V = 0.32\ V \tag{5}$$