SAPIENZA Università di Roma
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Corso di Fisica I
Proff. Marco Rossi, Daniele Passeri e Alessio Sarti

Prova di esame del 25 marzo 2022
APPELLO straordinario – a.a. 2021-22

Risolvere gli esercizi seguenti formulando la loro soluzione prima analiticamente e poi numericamente

1. Un bersaglio viaggia ad una quota h dal suolo con velocità orizzontale costante v_0. Si calcoli, in modulo, direzione e verso, la velocità minima che deve essere impressa ad un proiettile per colpire il bersaglio qualora esso sia esploso da un punto P del suolo nell'istante il cui il bersaglio si trova sulla sua verticale. [h=400 m; v_0=300 km/h]

2. Un punto materiale di massa m è posto sulla sommità di una calotta sferica liscia di raggio R=30 cm. Calcolare a che distanza dal punto di partenza il punto materiale si distacca dalla calotta sferica se, in seguito ad una perturbazione, comincia a scivolare su di essa.

3. Due dischi omogenei di densità pari a 7.15 g/cm^3, coassiali, aventi raggi R_1=30 cm e R_2=20 cm e stesso spessore d=1 cm, sono disposti ad una certa distanza. Inizialmente il disco di raggio R_1 è in rotazione attorno all'asse comune (senza attrito) con velocità angolare costante pari a 5 giri/s. Successivamente i due dischi vengono portati a contatto e, per effetto delle forze di attrito, acquistano la stessa velocità di rotazione. Si calcoli l'energia dissipata dagli attriti.

4. Determinare il lavoro scambiato con l'esterno da una macchina che, utilizzando come fluido una mole di gas biatomico esegue un ciclo reversibile ABCA composto da: una trasformazione adiabatica (A->B), un'isobara (B->C) e un'isoterma (C->A).
(p_A=5 atm, T_A=20°C, p_B=1 atm)

5. Una massa incognita di alluminio alla temperatura di 700 K viene immersa in 3 kg di acqua, inizialmente a 20°C, dentro un calorimetro adiabatico di capacità termica trascurabile. Se la temperatura finale è di 100° C si osserva che sono evaporati 50 g di acqua a tale temperatura. Si determini la massa di alluminio utilizzata assumendo che il calore latente di evaporazione dell'acqua è pari a 259 cal/g, il calore specifico dell'acqua è pari a 1 cal/gK per tutta la fase liquida e il calore specifico dell'alluminio è pari a 0.210 cal/gK. Calcolare inoltre la variazione di entropia del sistema.

Sezione TEORIA

Rispondere facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.

T1. Commentare almeno una situazione 'quotidiana' in cui si ha a che fare con la forza centrifuga.

T2. Si dia una definizione dell'energia interna di un sistema termodinamico. L'allievo illustri inoltre gli argomenti, sia di carattere teorico che sperimentale, in base ai quali l'energia interna di un gas ideale risulta dipendere dalla sola temperatura.

SOLJUZIONI della prova di esame del 25 marzo 2022
APPELLO straordinario – a.a. 2021-22

E1) Legge oraria del bersaglio e del proiettile:

$$\text{Bersaglio}:\begin{cases} x_b(t) = v_0 t \\ y_b(t) = h \end{cases} \qquad \text{Proiettile:}\begin{cases} x_p(t) = v\cos\alpha t \\ y_p(t) = v\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Affinché il proiettile colpisca il bersaglio al tempo t_1 deve essere:

$$x_b(t_1) = x_p(t_1) \quad \Rightarrow \quad v_0 t_1 = v\cos\alpha t_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{v}$$

$$y_b(t_1) = y_p(t_1) \quad \Rightarrow \quad h = v\sin\alpha t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

derivando si ottiene:

$$0 = v\sin\alpha - gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v\sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow h = v\sin\alpha\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right)^2 = \left(\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

e sfruttando le relazione fondamentale della trigonometria:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{2gh}{v^2}\right) + \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh + v_0^2} = 121.6 \ \ m/s \quad , \ \alpha = 46.7°$$

E2) In assenza di attrito si conserva l'energia meccanica del sistema, per cui:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgR(1 - \sin\theta)$$

Inoltre, il punto materiale percorre una traiettoria circolare fin quando rimane sulla calotta, per cui proiettando lungo la direzione normale e tangenziale alla traiettoria, si ha:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N = m\mathbf{a}$$

$$mg\cos\theta = ma_t \qquad \text{lungo la dir. tangenziale}$$

$$mg\sin\theta - R_N = ma_n = m\frac{v^2}{R} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)\frac{2}{R} = 2mg(1 - \sin\theta) \ \ \text{lungo la dir. normale}$$

Affinché il punto materiale rimanga sulla calotta sferica, si deve avere $R_N > 0$. Al momento del distacco si avrà $R_N = 0$, cioè:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) ; \ 41.8°$$

$$d = R\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 25.2cm$$

E3) Le forze interne al sistema non alterano il momento angolare totale, che quindi si conserva:

$$I_1\omega_{iniziale} = (I_1 + I_2)\omega_{finale} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{finale} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_{iniziale}$$

da cui, sapendo che il momento d'inerzia di un disco è pari a:

$$I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\rho VR^2 = \frac{1}{2}\rho d(\pi R^2)R^2 = \frac{1}{2}\rho d\pi R^4$$

si ottiene per la velocità angolare finale:

$$\omega_{finale} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_{iniziale} = \frac{1}{1 + \left(\frac{I_2}{I_1}\right)}\omega_{iniziale} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_2^4}{R_1^4}\right)}\omega_{iniziale} = \frac{R_1^4}{R_1^4 + R_2^4}\omega_{iniziale} = 26.2\ rad/s$$

e per l'energia dissipata dalle forze interne:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_{iniziale}^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_{finale}^2 = \frac{1}{4}\rho d\pi[R_1^4\omega_{iniziale}^2 - (R_1^4 + R_2^4)\omega_{finale}^2] = 75\ \mathrm{J}$$

E4) $L_{AB}=-\Delta U=c_V(T_A-T_B)>0$; $L_{BC}=p\Delta V=p_B(V_C-V_B)=R(T_C-T_B)=R(T_A-T_B)>0$;

$L_{CA}=RT_A \ln(V_A/V_C)= RT_A \ln(p_C/p_A)= RT_A \ln(p_B/p_A)<0$.

Si ricava T_B dalla $p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T =$ cost:

$$p_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T_A = p_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T_B \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$; con g=7/5.

Risulta quindi:

$$L = (c_v + R)T_A\left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right) + RT_A \ln\frac{p_B}{p_A} =$$

$$= c_pT_A\left[1 - \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] + RT_A \ln\frac{p_B}{p_A} = -778.2J$$

(con c_p=7/2 R)

Si tratta di una macchina refrigerante.

E5) Dette m_{Al} la massa incognita dell'alluminio, m_v la massa d'acqua trasformata in vapore e m_{ac} la massa dell'acqua:

$$Q_{Al} = m_{Al}c_{Al}(T^F - T_{Al}^I), \quad Q_{ac} = m_v\lambda_{ac} + m_{ac}c_{ac}(T^F - T_{ac}^I)$$

$$m_{Al} = \frac{m_v\lambda_{ac} + m_{ac}c_{ac}(T_F - T_{ac}^I)}{-c_{Al}(T_F - T_{Al}^I)} \approx 3.26kg$$

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_{ac} - \Delta S_{Al} = \frac{m_v\lambda_{ac}}{T_{fus,ac}} + m_{ac}c_{ac}\ln\left(\frac{T^F}{T_{ac}^I}\right) + m_{Al}c_{Al}\ln\left(\frac{T^F}{T_{Al}^I}\right) \approx 272\frac{cal}{K}$$