SAPIENZA Università di Roma
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Corso di Fisica I
Proff. Marco Rossi, Daniele Passeri e Alessio Sarti

Prova di esame del 10 marzo 2023
APPELLO straordinario – a.a. 2022-22

Risolvere gli esercizi seguenti formulando la loro soluzione prima analiticamente e poi numericamente

1. Un punto materiale si muove, partendo da fermo, lungo una traiettoria circolare (raggio R = 100 m) con accelerazione tangenziale costante. All'istante t_1 = 10s l'accelerazione del punto forma un angolo di 60° rispetto alla direzione tangente alla traiettoria. Calcolare: ***a)*** l'intensità dell'accelerazione tangenziale; ***b)*** il valore dell'accelerazione normale; ***c)*** il valore dell'accelerazione all'istante t_1.

2. Un disco di massa M = 1 kg e raggio R = 50 cm è fissato ad una parete verticale mediante un piolo posto nel suo centro C; all'estremità è saldato un corpo puntiforme di massa $m = M/2$. Il sistema può ruotare senza attrito intorno al piolo. Calcolare ***a)*** la posizione del centro di massa del sistema, ***b)*** il momento di inerzia I_c rispetto al centro del disco, ***c)*** il modulo della quantità di moto e l'energia cinetica del sistema quando la velocità angolare del disco vale, in modulo, ω = 2.5 rad/s.

3. Una sfera omogenea, di volume V = 25 dm^3 e densità ϱ è trattenuta, completamente immersa nell'acqua di una piscina da una molla ideale, ancorata al fondo, di costante elastica k = 2000 N/m. La molla è allungata di $\Delta x = 10$ cm rispetto alla lunghezza di equilibrio. A causa della rottura della funicella, la sfera emerge raggiungendo una nuova posizione di equilibrio. Determinare la frazione di sfera immersa.

4. Un recipiente adiabatico rigido e a tenuta è diviso in due parti uguali da un setto isolante. Una parte contiene gas perfetto a temperatura e pressioni iniziali T_1= 300 K e $p_1 = 10^5$ Pa. Nella seconda parte è contenuta una quantità dello stesso gas perfetto a T_2 = 500 K e $p_2 = 3\ 10^5$ Pa. Il setto viene rimosso rapidamente e i due gas si mescolano. Si trovi la temperatura e la pressione del gas nello stato finale.

5. In un recipiente diatermico è presente una massa M di acqua in equilibrio con l'ambiente (T_{amb} = 27°C). Una massa m = 200g di ghiaccio, inizialmente alla temperatura T_{gh} = -10°C, viene immersa nell'acqua e, dopo un certo periodo di tempo, il sistema torna in equilibrio con l'ambiente. Calcolare: ***a)*** il calore scambiato tra il sistema e l'ambiente esterno; ***b)*** la variazione di entropia del sistema; ***c)*** la variazione di entropia dell'ambiente. (Si consideri il calore specifico del ghiaccio pari alla metà di quello dell'acqua).

Sezione TEORIA

Rispondere facoltativamente, con essenzialità e correttezza, alle seguenti domande.

T1. Sia I_{CM} il momento di inerzia di un corpo rigido di massa m rispetto ad un asse di rotazione che passa per il centro di massa del corpo. Dimostrare che il momento di inerzia relativo ad un altro generico asse di rotazione, parallelo a quello usato per il calcolo di I_{CM} e da esso distante d, è pari ad $I = I_{CM} + md^2$.

T2. Dimostrare che l'Entropia di un sistema isolato non può diminuire.

SAPIENZA Università di Roma
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Corso di Fisica I
Proff. Marco Rossi, Daniele Passeri e Alessio Sarti

SOLUZIONI della prova di esame del 10 marzo 2023
APPELLO straordinario – a.a. 2022-23

E1. L'angolo formato tra il vettore accelerazione e la direzione tangente alla traiettoria è dato da:

$$ctg(\theta) = \frac{a_t}{a_n} = \frac{a_t \cdot R}{v^2} = \frac{R}{a_t \cdot t^2}$$

da cui si ottiene:

$$a_t = \sqrt{3} \quad m/s^2 \ , \ a_n = \frac{(a_t \cdot t_1)^2}{R} = 3 \quad m/s^2 \ \Rightarrow \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 2\sqrt{3} \quad m/s^2$$

E2. Il centro di massa del sistema si trova lungo la congiungente tra il centro del disco e la massa puntiforme ad una distanza d dal centro del disco: ***d** = mR/(m+M)= R/*3 = **16.7 cm**. Il momento di inerzia sarà pari a $\boldsymbol{I_c} = I_{disco} + mR^2 = MR^2/2 + mR^2 = (m+M/2)R^2$ = **0.25 kg m²**. Il modulo della quantità di moto è pari ad $\boldsymbol{p_{CM}} = M\, v_{CM} = M\, \omega\, d$ = **1.9 kg m/s**. L'energia cinetica del sistema è pari a $1/2\ I_c\, \omega^2$ = **0.78 J**.

E3. Inizialmente si ha $k\, \Delta x = \rho_a V g - \rho V g$ da cui si ricava la densità della sfera $\rho = \rho_a - \frac{k\Delta x}{Vg} = 184$ kg/m³ . Dopo la rottura si ha che $\rho_a V_i g = \rho V g$ da cui la frazione di volume immerso è $V_i / V = \rho/\rho_a = 0.184$.

E4. Il sistema è isolato, e la trasformazione si compie a V = costante, quindi la temperatura finale si ricava imponendo che i due gas abbiano eguale variazione di energia interna: $\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$, da cui $n_1 c_V (T_f - T_1) + n_2 c_V (T_f - T_2) = 0$. Calcolando $n_1 = p_1 V_1 / RT_1$ ed $n_2 = p_2 V_2 / RT_2$ si ricava $T_f = (n_1 T_1 + n_2 T_2) / (n_1 + n_2)$. Imponendo $V_1 = V_2$ si ottiene $n_2 = (p_2/RT_2) * n_1 * RT_1/p_1$ e dunque $n_2 = n_1 (p_2/p_1) * (T_1/T_2)$. Sostituendo si ricava $\boldsymbol{T_f} = [T_1 + T_2 (p_2/p_1)(T_1/T_2)] / (1 + (p_2/p_1)(T_1/T_2))$ = **429 K**. La pressione è data dall'equazione di stato finale: $p_f = n_{tot} RT_f / 2V$ e sostituendo ad n_{tot} il valore $(V/R)*(p_1/T_1 + p_2/T_2)$ si ottiene $\boldsymbol{p_f = 2\ 10^5}$ **Pa**.

E5. La temperatura dello stato finale è ancora quella dell'ambiente esterno; il calore scambiato con l'ambiente è quindi quello necessario per portare il ghiaccio, una volta in fase liquida, alla temperatura di equilibrio finale:

$$Q = m \cdot c_{gh}(T_0 - T_{gh}) + m\lambda + m \cdot c_{H_2O}(T_{amb} - T_0)$$

da cui si ottiene $\boldsymbol{Q}$ **= 22 kcal.** Le variazione di entropia del ghiaccio e dell'ambiente sono date da:

$$\Delta S_{gh} = mc_{gh} \ln\left(\frac{T_0}{T_{gh}}\right) + \frac{m\lambda}{T_0} + mc_{H_2O} \ln\left(\frac{T_{amb}}{T_0}\right) \approx 81.15 \quad cal/K$$

$$\Delta S_{amb} = \frac{-Q}{T_{amb}} \approx -54{,}7 \quad cal/K$$