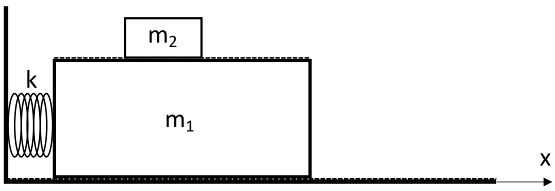
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio
06 febbraio 2023 – prova scritta di Fisica 1

1) Un punto materiale si muove di moto circolare uniformemente accelerato seguendo la legge oraria $s(t)=kt^2$, con $k=0,25\ m/s^2$. Sapendo che al tempo $t_1=4s$ il modulo dell'accelerazione vale $a_1=0,75\ m/s^2$, calcolare:

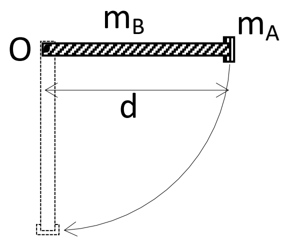
a) l'accelerazione tangenziale
b) la velocità all'istante t_1
c) il raggio della traiettoria.

2) Un corpo di massa $m_1=12\ kg$ è mantenuto in quiete in una situazione in cui comprime contro una parete una molla ideale di massa trascurabile e costante elastica $k=100\ N/m$. Un altro corpo di massa $m_2=2kg$ è sovrapposto al primo. Fra i due corpi e fra il corpo m_1 e il pavimento c'è attrito dinamico di coefficiente $\mu_d=0,1$. Si lascia libero il sistema e si osserva che esso parte con accelerazione del centro di massa $a_{CM}=2m/s^2$. Determinare, sapendo che il coefficiente di attrito statico fra i due corpi non è sufficiente a mantenerli solidali:



a) la compressione iniziale della molla
b) l'accelerazione iniziale del corpo m_2
c) l'accelerazione iniziale del corpo m_1.

3) Un punto materiale di massa $m_A=200g$ è fissato all'estremità libera di un'asta omogenea di massa $m_B=2kg$ e lunghezza $d=3m$, vincolata nell'altro suo estremo. Il vincolo è scabro e vi si esercita una forza di attrito di momento costante $M_{ATT}=6\ N/m$. Il corpo viene lasciato partire da fermo dalla posizione orizzontale. Calcolare per il sistema asta-corpo, non appena è libero di muoversi:



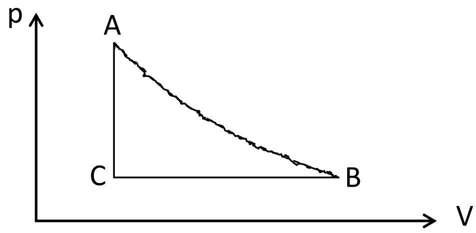
a) l'accelerazione angolare
b) la velocità del punto materiale quando passerà per la posizione verticale.

(il lavoro effettuato dal momento di una forza per una rotazione di un angolo θ vale: $L(\theta) = \int M\, d\theta$)

4) Un recipiente rigido a pareti adiabatiche è diviso in due parti A e B da un setto mobile senza attriti di capacità termica trascurabile. Il recipiente contiene in A e B rispettivamente $n_A=5$ *moli* e $n_B=3$ *moli* di un gas perfetto biatomico. Nello stato iniziale il setto è isolante e il sistema è in equilibrio nelle seguenti condizioni: $V_A=80$ *litri*, $V_B=20$ *litri*, $T_A=400K$. Successivamente si toglie l'isolamento termico tra i gas, per cui il setto diventa ora conduttore termico, e si attende il ristabilimento dell'equilibrio termodinamico. Calcolare:

a) la temperatura iniziale del gas B
b) la temperatura finale del sistema
c) il volume finale di A.

5) Una macchina termica che utilizza $n=0,5$ *moli* di un gas perfetto biatomico esegue il seguente ciclo: una espansione irreversibile da A di temperatura $T_A=400K$ a B di temperatura $T_B=500K$; una compressione isobara reversibile fino al volume iniziale e alla temperatura T_C; una trasformazione isocora reversibile dal punto C fino allo stato iniziale A assorbendo il calore $Q_{CA}=1500\ J$. Sapendo che il lavoro totale prodotto nel ciclo è di *1200 J*, determinare:



a) la temperatura dello stato C
b) il calore assorbito nella trasformazione AB
c) il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione AB.

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ingegneria Civile e Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio
06 febbraio 2023– Soluzioni dello scritto di Fisica 1

1a) Per l'accelerazione tangenziale possiamo scrivere la legge oraria dello spazio:

$$s(t) = kt^2 = \frac{1}{2}a_\tau t^2 \quad \rightarrow \quad a_\tau = 2k = 0{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

1b) la legge oraria della velocità è

$$v(t_1) = a_\tau t_1 = 2kt_1 = 2\,\frac{m}{s}$$

1c) Possiamo calcolare il raggio di curvatura conoscendo il modulo dell'accelerazione totale:

$$a_{TOT}(t_1) = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{4k^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = \sqrt{4k^2 + \frac{8k^4t_1^4}{R^2}}$$

da cui:

$$R = \sqrt{\frac{8k^4t_1^4}{a_{TOT}^2 - 4k^2}} = 7{,}16\,m$$

2a) Conoscendo l'accelerazione del centro di massa possiamo scrivere la prima equazione cardinale della dinamica al sistema totale:

$$(m_1 + m_2)a_{CM} = k\,\Delta x - \mu_d(m_1 + m_2)g$$

da cui:

$$\Delta x = \frac{(a_{CM} + \mu_d g)(m_1 + m_2)}{k} = 0{,}42\,m$$

2b) Il corpo 2 viene spinto esclusivamente dall'attrito dinamico su di lui esercitato:

$$m_2a_2 = \mu_d m_2 g \quad \rightarrow \quad a_2 = \mu_d g = 0{,}981\,\frac{m}{s^2}$$

2c) Il corpo 1 sente la forza della molla, l'attrito dinamico esercitato dal corpo 2 e l'attrito dinamico con il suolo:

$$m_1a_1 = k\,\Delta x - \mu_d(m_1 + m_2)g - \mu_d m_2 g$$

da cui:

$$a_1 = \frac{k\,\Delta x - \mu_d(m_1 + m_2)g - \mu_d m_2 g}{m_1} = 2{,}17\,\frac{m}{s^2}$$

3a) Applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica al sistema asta più corpo rispetto al vincolo di rotazione:

$$I_{TOT}\vec{\Omega} = \vec{\mathrm{M}}_{ATTRITO} + \vec{\mathrm{M}}_{PESO-A} + \vec{\mathrm{M}}_{PESO-B}$$

dove

$$I_{TOT} = \frac{1}{3}m_Bd^2 + m_Ad^2 = \left(\frac{1}{3}m_B + m_A\right)d^2$$

da cui

$$I_{TOT}\Omega = \mathrm{d}\,m_Ag + \frac{\mathrm{d}}{2}m_Bg - \mathrm{M}_{ATTRITO}$$

da cui

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\left(m_A + \frac{m_B}{2}\right)g - \mathrm{M}_{ATTRITO}}{\left(\frac{1}{3}m_B + m_A\right)d^2} = 3{,}75\,\frac{rad}{s^2}$$

3b) Possiamo applicare il teorema delle forze vive (bilancio dell'energia meccanica totale):

$$\mathrm{d}\, m_A g + \frac{\mathrm{d}}{2} m_B g + L_{ATTRITO} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove il lavoro dell'attrito costante sarà:

$$L_{ATTRITO} = -\mathrm{M}_{ATTRITO} \frac{\pi}{2}$$

da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{(2m_A + m_B)\mathrm{d}g - \pi \mathrm{M}_{ATTRITO}}{I}} \quad \rightarrow \quad v = \omega \mathrm{d} = \sqrt{\frac{(2m_A + m_B)\mathrm{d}g - \pi \mathrm{M}_{ATTRITO}}{\left(\frac{1}{3} m_B + m_A\right)}} = 7{,}7\ m/s$$

4a) Poiché il setto tra le due porzioni è mobile senza attrito, l'equilibrio è dato dall'equilibrio delle pressioni:

$$p_A = p_B$$

Usando le funzioni di stato dei gas perfetti:

$$\begin{cases} p_A V_A = n_A R T_A \\ p_B V_B = n_B R T_B \end{cases}$$

Facendo il rapporto tra le due equazioni si ottiene:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{n_A T_A}{n_B T_B}$$

da cui

$$T_B = T_A \frac{n_A}{n_B} \frac{V_B}{V_A} = 166{,}7\ K$$

4b) La temperatura finale è uguale per il gas A e per il gas B (temperatura di equilibrio) poiché sono a contatto termico attraverso il setto. Sappiamo che la trasformazione totale è adiabatica (Q=0) poiché il recipiente è adiabatico e senza lavoro esterno (L=0) poiché il recipiente è rigido. Pertanto la variazione totale di energia interna dev'essere anch'essa nulla:

$$\Delta U_{tot} = \Delta U_A + \Delta U_B = 0 = n_A c_v \left(T_{eq} - T_A\right) + n_B c_v \left(T_{eq} - T_B\right)$$

da cui la temperatura finale di equilibrio

$$T_{eq} = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B} = 312{,}5\ K$$

4c) Nello stato finale si avrà ancora l'equilibrio delle pressioni:

$$p'_A = p'_B = p'$$

Poiché i gas sono a contatto termico, si comporteranno in maniera uguale cioè portandosi alla stessa temperatura e alla stessa pressione. Pertanto possiamo considerarli come se fossero un solo gas, il cui volume totale è dato dalla somma dei volumi:

$$p' V_{tot} = p'(V_A + V_B) = (n_A + n_B) R T_{eq}$$

da cui

$$p' = \frac{(n_A + n_B) R T_{eq}}{(V_A + V_B)}$$

Conoscendo la pressione possiamo calcolare il volume del singolo gas A:

$$p' V_A = n_A R T_{eq} \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{n_A R T_{eq}}{p'} = \frac{n_A}{n_A + n_B}(V_A + V_B) = 62{,}5\ litri$$

5a) Conoscendo il calore della trasformazione CA possiamo calcolare la temperatura di C:

$$Q_{CA} = n c_v (T_A - T_C) \quad \rightarrow \quad T_C = T_A - \frac{Q_{CA}}{n c_v} = 255{,}6\ K$$

5b) Il calore scambiato lungo la trasformazione irreversibile AB può essere calcolato conoscendo il lavoro totale del ciclo:

$$Q_{ciclo} = L_{ciclo} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} \quad \rightarrow \quad Q_{AB} = L_{ciclo} - n c_p (T_C - T_B) - Q_{CA} = 3254\ J$$

5c) il lavoro può essere calcolato anche dal lavoro totale del ciclo:

$$L_{ciclo} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} \quad \rightarrow \quad L_{AB} = L_{ciclo} - L_{BC} - L_{CA} = L_{ciclo} - L_{BC} = L_{ciclo} - (p_C V_C - p_B V_B)$$
$$= L_{ciclo} - nR(T_C - T_B) = 2215 J$$

In alternativa:

non conosciamo che tipo di trasformazione sia la AB ma comunque il 1° principio della TD resta valido sempre. Pertanto, sapendo che l'energia interna è una funzione di stato:

$$L_{AB} = Q_{AB} - \Delta U_{AB} = Q_{AB} - nc_v(T_B - T_A) = 2215\ J$$