



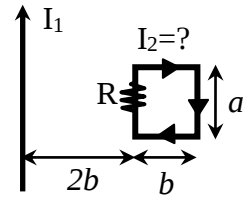
FISICA

A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale

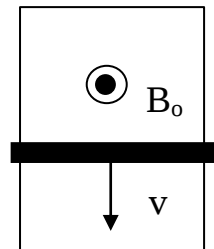
20° prova

1. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1 = I_0[1 - \exp(-t/\tau)]$. Una spira rettangolare di lati a, b giace con il filo nel piano del foglio. Assumendo nota la resistenza elettrica R della spira, determinare l'espressione della corrente indotta nella spira e fornirne il valore iniziale al tempo $t=0$. Si trascurino i fenomeni di autoinduzione. [Dati: $\tau=10\text{ms}$, $I_0=2\text{mA}$, $a=1\text{cm}$, $R=20\Omega$]

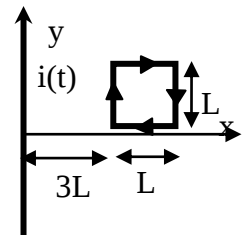


2. Una spira rigida quadrata di lato a e di resistenza elettrica R si muove nel vuoto su di un piano contenente un lungo filo rettilineo percorso dalla corrente I , con velocità costante v , mantenendo uno dei suoi lati parallelo al filo stesso. Ricavare in funzione della distanza $L(t)$ l'espressione della forza esterna che occorre applicare alla spira per mantenere costante la velocità di traslazione.

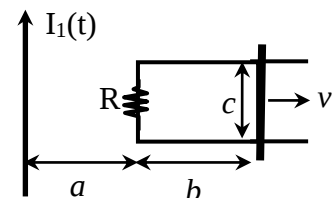
3. Una barretta cilindrica di rame di resistenza R , di lunghezza L e di massa m può scorrere mediante contatti striscianti su due guide metalliche verticali connesse elettricamente fra di loro (come in figura). Calcolare la velocità limite di caduta quando la barretta è lasciata cadere per gravità in un campo magnetico orizzontale uniforme B_0 .



4. Una spira quadrata di lato L giace ad una distanza $d=3L$ da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente sinusoidale $i(t) = i_{\max} \cos(\omega t)$. Nota la resistenza elettrica R della spira, calcolare l'intensità della corrente massima indotta. Si trascuri l'autoinduzione presente nella spira [Dati: $L = 10\text{ cm}$, $i_{\max} = 2\text{ mA}$, $\omega = 314\text{ rad/s}$, $R = 1\Omega$]



5. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1(t) = I_0(1 - t/\tau)$ nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$. Una spira rettangolare di lati b, c giace con il filo nel piano del foglio come indicato in figura ad una distanza minima a dal filo. La spira è inoltre costituita da 3 lati fissi ed un lato mobile inizialmente disposto alla distanza $a+b$ dal filo e dotato della velocità $v=3\text{m/s}$. Assumendo $R=2\Omega$ la resistenza elettrica della spira, determinare l'espressione della forza elettromotrice indotta, della corrente indotta e della forza agente sul lato mobile della spira al tempo $t=0$. [Dati: $\tau=400\text{ms}$, $I_0=10\text{A}$, $a=1\text{m}$, $b=2\text{m}$, $c=4\text{m}$]





FISICA

A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale

Soluzioni della 20ª prova

1. Il campo magnetico nonuniforme generato dal primo filo è $B_{o1}(x,t) = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata (la normale alla spira $\hat{n}$ ha lo stesso verso di $\vec{B}_{o1}$) si ricava il flusso concatenato:

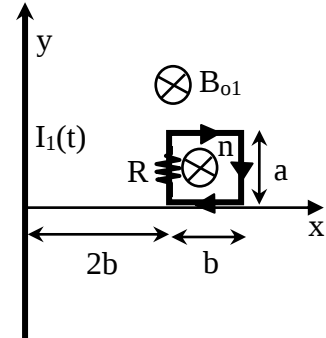
$$\Phi_{c,1} = \int \vec{B}_{o1} \cdot \hat{n} dS = \int B_{o1} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \int_0^a dy \int_{2b}^{3b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t) a}{2\pi} \ln(3/2).$$

la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o a I_o}{2\pi\tau} \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) \right] \exp(-t/\tau)$$

e la corrente indotta

$$I_3(t) = \frac{f_i}{R} = -\frac{\mu_o a I_o \ln 3/2}{2\pi R \tau} \exp(-t/\tau) \quad \text{che in } t=0 \text{ vale } I_3(0) = -\frac{\mu_o a I_o \ln 3/2}{2\pi R \tau} = -8.1 \text{ pA}$$



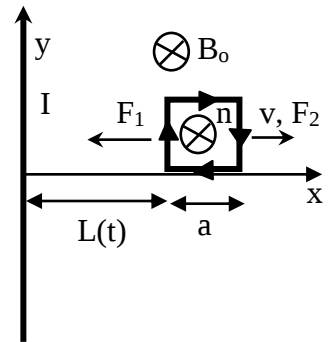
2. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x) = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c :

$$\Phi_c(t) = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_0^L dy \int_L^{L+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{L(t)}\right).$$
 Applicando

la legge di Faraday-Neumann-Lenz possiamo calcolare la corrente indotta nella spira $i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_c}{dt} = \frac{\mu_o I a^2}{2\pi R} \frac{v}{L(L+a)}$. Infine applicando la 2 formula di Laplace si ottengono le forze

$$F_1 = aiB_{o1} = \frac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R L^2 (L+a)} \quad \text{e} \quad F_2 = aiB_{o2} = \frac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R L (L+a)^2}.$$
 La risultante è quindi attrattiva

$F_1 - F_2 = \frac{\mu_o^2 I^2 a^4}{(2\pi)^2 R L^2 (L+a)^2}$ e tende a rallentare il movimento della spira. Per mantenere la spira a velocità uniforme è quindi necessario applicare una forza esterna uguale e contraria alla risultante.

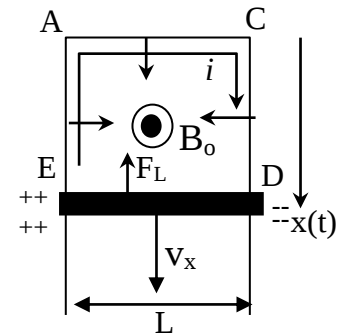


3. Il flusso concatenato con il circuito ABCD è $\Phi(t) = B_o \cdot L \cdot x(t)$ dove $x(t)$ è la posizione mobile della barretta. Il movimento della barretta DE cioè causa una variazione di flusso di B_o nel circuito ACDE generando una forza elettromotrice

indotta $f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_o L v_x$ (legge di Faraday-Neumann-Lenz) dove il segno

negativo indica che la corrente circola nel verso orario ossia nel verso opposto a quello considerato positivo rispetto a B_o (regola mano destra). L'intensità di questa corrente indotta è $i = f_i/R = B_o L v_x / R$. In accordo alla seconda formula

di Laplace, sui 4 lati del circuito si generano forze attrattive. In particolare sull'unico lato mobile DE si genera una forza frenante $F_L = i l B_o = B_o^2 L^2 v_x / R$ proporzionale alla velocità di caduta, contraria al moto (asse x) ed alla forza peso $P = mg$. Applicando il II principio lungo l'asse di caduta x , si ottiene $ma_x = mg - F_L$ che è una equazione differenziale del primo ordine poiché $a_x = dv_x/dt$. Assumendo nulla la velocità iniziale l'espressione della velocità diverrà $v_x(t) = v_{lim}(1 - \exp(-t/\tau))$ dove la velocità di caduta cresce fino a raggiungere $v_{lim} = mgR/(B_o^2 L^2)$.



4. Il campo magnetico non uniforme generato dal filo rettilineo vale, per la

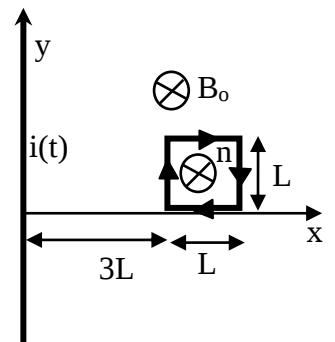
legge di Biot e Savart, $B_o(x,t) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in

figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c :

$$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi} \int_0^L dy \int_{3L}^{4L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o i(t) L}{2\pi} \ln(4/3).$$

legge di Faraday-Neuman-Lenz possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira con l'equazione $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{d}{dt} i(t) = \frac{\mu_o L i_{max} \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \sin(\omega t)$. Infine l'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene $i_2(t) = f_i/R$. Tale corrente è alternata ed ha valore massimo

$$i_{2,max} = \frac{\mu_o L i_{max} \omega}{2\pi R} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\pi 10^{-7} 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 314}{2\pi \cdot 1} 0.288 = 3.61 \text{ nA}.$$



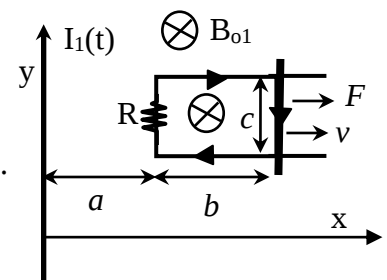
5. Il campo magnetico non uniforme generato dal primo filo è $B_{o1}(x,t) = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$.

Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata

(la normale alla spira $\hat{n}$ ha lo stesso verso di $\vec{B}_{o1}$)

si ricava il flusso concatenato:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_{o1} \cdot \hat{n} dS = \int B_{o1} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \int_0^c dy \int_a^{a+b(t)} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t) c}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b(t)}{a}\right).$$



la **forza elettromotrice indotta nella spira**

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o c}{2\pi} \left[\frac{dI_1}{dt} \ln\left(1 + \frac{b(t)}{a}\right) + I_1 \frac{d}{dt} \ln\left(1 + \frac{b(t)}{a}\right) \right] = \frac{\mu_o c}{2\pi} \left[\frac{I_0}{\tau} \ln\left(1 + \frac{b(t)}{a}\right) - I_o \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \frac{v}{a + b(t)} \right]$$

che al tempo t=0 vale $f_{i0} = \frac{\mu_o I_o c}{2\pi} \left[\frac{1}{\tau} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) - \frac{v}{a + b} \right] = \mathbf{14.0 \mu V}$

la corrente indotta al tempo t=0 $I_{2o} = \frac{f_{i0}}{R} = \mathbf{7.0 \mu A}$