INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 22-06-2018

ESERCIZIO 1
Utilizzando le formule di Green-Gauss, calcolare

$$\int_{+\partial D} y^2 dx + x^2 dy$$

dove D è il dominio delimitato dalle curve $y = -x^2 + x$ e $y = 0$.

SOLUZIONE

$$\begin{aligned}\int_{+\partial D} y^2 dx + x^2 dy &= \iint_D (2x - 2y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{-x^2+x} (2x - 2y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[2xy - y^2\right]_{y=0}^{y=-x^2+x} dx \\ &= \int_0^1 [(-2x^3 + 2x^2) - (x^4 - 2x^3 + x^2)] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

dove Ω è il dominio poggiato sopra il piano $z = 0$, interno alla superficie $x^2 + y^2 = 4$, esterno a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed $\vec{F} = (2xz, yx^2, zy^2)$.

SOLUZIONE
Si ha div $\vec{F} = 2z + x^2 + y^2$ e quindi, utilizzando il teorema della divergenza e poi le coordinate cilindriche, si trova:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_\Omega (2z + x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^\rho (2z + \rho^2) \rho dz d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^2 \left[z^2 \rho + z\rho^3\right]_{z=0}^{z=\rho} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^2 (\rho^3 + \rho^4) d\rho \\ &= \pi \frac{104}{5}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

Sviluppare in serie di Fourier di soli seni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ \pi - x & \text{per} \quad \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x & \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi, \\ 0 & \text{per} \quad \frac{2}{3}\pi < x \leq \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE

La funzione è discontinua e quindi la serie non converge totalmente. Si ha poi:

$$\begin{aligned} b_k =& \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (\pi - x) \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{2\pi/3} x \sin kx dx \\ =& \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} - \pi \frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi/3}^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{\pi/2}^{2\pi/3} \\ =& \frac{4}{3k} \left[\cos \frac{k\pi}{3} - \cos \frac{2k\pi}{3} \right] + \frac{2}{\pi k^2} \left[\sin \frac{k\pi}{3} + \sin \frac{2k\pi}{3} - 2 \sin \frac{k\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{per} \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \\ f(x) & \text{per} \quad x \in [0, \pi], x \neq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. La funzione è pari rispetto al punto $\frac{\pi}{2}$ e quindi i coefficienti di indice pari devono essere uguali a zero. In effetti, utilizzando le identità

$$\begin{aligned} \cos \frac{k\pi}{3} - \cos \frac{2k\pi}{3} &= \cos \frac{k\pi}{3} - \cos \left(\pi - \frac{k\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{k\pi}{3} - (-1)^k \cos \frac{k\pi}{3} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ 2 \cos \frac{k\pi}{3} & \text{per} \quad k \text{ dispari,} \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\sin \frac{k\pi}{3} + \sin \frac{2k\pi}{3} = \sin \frac{k\pi}{3} + \sin \left(\pi - \frac{k\pi}{3} \right) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ 2 \sin \frac{k\pi}{3} & \text{per} \quad k \text{ dispari} \end{cases}$$

si trova che

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ \frac{8}{3k} \cos \frac{k\pi}{3} + \frac{4}{\pi k^2} \left[\sin \frac{k\pi}{3} - (-1)^{(k-1)/2} \right] & \text{per} \quad k \text{ dispari.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 2\cos x & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) + \cos x & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 1, u(\pi,t) = -1 & t > 0, \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente. Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} -2u_s'' = -2\cos x, \\ u_s(0) = 1, u_s(\pi) = -1, \end{cases}$, la cui soluzione è: $u_s(x) = \cos x$. Ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$, la funzione v deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove f è la funzione dell'esercizio precedente. Quindi, se i coefficienti b_k sono come nella soluzione dell'esercizio precedente,

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-2k^2 t} \sin kx.$$

Ne segue che, essendo $\max_{[0,\pi]}|f(x)| = \frac{2\pi}{3}$ ed $\frac{L^2}{D} = \frac{\pi^2}{2}$ si ha:

$$|u(x,t) - u_s(x)| \le \frac{8\pi}{3} e^{-2t} \qquad \text{per ogni} \qquad t \ge \frac{\pi^2}{2}.$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 1 - 2xy & x^2 + y^2 < 1 \\ u = 1 & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica della soluzione trovata.

SOLUZIONE
E' un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson nel disco unitario. In coordinate polari abbiamo:

$$1 - 2xy = 1 - r^2 \sin 2\theta, \qquad 1|_{x^2+y^2=1} = 1$$

e quindi il problema diventa

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 1 - r^2 \sin 2\theta & 0 < r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi \\ U(1,\theta) = 1 & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

La soluzione va cercata nella forma $U(r,\theta) = v_1(r) + v_2(r)\sin 2\theta$. Per v_1 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_1'' + \frac{1}{r}v_1' = 1 \\ v_1(1) = 1, v_1 \text{ limitata,} \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_1(r) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}r^2$. Per v_2 abbiamo il problema

$$\begin{cases} v_2'' + \frac{1}{r}v_2' - \frac{4}{r^2}v_2 = -r^2 \\ v_2(1) = 0, v_2 \text{ limitata,} \end{cases}$$

la cui soluzione è $v_2(r) = \frac{1}{12}r^2 - \frac{1}{12}r^4$. Quindi la soluzione del problema iniziale è:

$$\begin{aligned} U(r,\theta) =& \frac{3}{4} + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}r^2\sin 2\theta - \frac{1}{12}r^4\sin 2\theta \\ =& \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x^2+y^2) + \frac{1}{6}xy - \frac{1}{6}(x^2+y^2)xy. \end{aligned}$$

<u>Verifica</u>:

$$\begin{aligned} u|_{x^2+y^2=1} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1; \\ u_{xx} + u_{yy} &= \left(\frac{1}{2} - xy\right) + \left(\frac{1}{2} - xy\right) = 1 - 2xy. \end{aligned}$$