compito 1 del 23-01-20

E1) La funzione è pari, dunque $f(\frac{5}{2}\pi)=f(-\frac{5}{2}\pi)$ e $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$. Poiché è anche regolare a tratti in $\mathbb{R}$, la sua serie di Fourier converge totalmente in $\mathbb{R}$ e ha per somma $S(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

$f(x)$ è di quadrato sommabile in $[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ (cioè $\int_{-\frac{5}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}(f(x))^2dx < +\infty$) essendo continua; pertanto la sua serie di Fourier converge in media quadratica.

$S(\frac{15}{2}\pi) = S(\frac{5}{2}\pi)=f(\frac{5}{2}\pi) = \frac{5}{2}\pi$

$S(\frac{31}{3}\pi) = S(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{3})= \frac{\pi}{8}\sqrt{3}$

E2) $\sigma[f]=-\infty$ in quanto $f(x)$ è somma di due funzioni, entrambe nulle fuori di un intervallo limitato $[a,b]$.

$$\mathcal{L}[f(t)](s)= \int_1^2 e^{(-s+2i)t}dt + \int_0^7 e^{(-s+1+i)t}dt =$$

$$= \frac{e^{(-s+2i)2}}{-s+2i} - \frac{e^{(-s+2i)}}{-s+2i} + \frac{e^{(-s+1+i)7}}{-s+1+i} - \frac{e^{(-s+1+i)6}}{-s+1+i}$$

E3) La serie converge nell'intorno forato di e^i $0<|z-e^i|<1$. L'unico punto singolare è $z_0=e^i$, pS di ordine 6 con residuo $=c_{-1}=8^4$

2

D1) $I_{def} = \mathbb{C} - \{-1\}$. In realtà, in questo caso essendo l'esponente $\pi \in \mathbb{R}_+$, la funzione si può prolungare a tutto $\mathbb{C}$, ponendo $f(-1) = 0$.

$I_{olom.} = \mathbb{C} - \{z = x+iy : x \leq -1, y = 0\}$.

Ammette primitiva in quest'ultimo insieme perché è semplicemente connesso e $f(z)$ è olomorfa in I_{olom}.

D2) i) f continua in A aperto connesso $\Leftrightarrow \int_\gamma f(z)dz$ dipende solo dagli estremi di γ curve di A $\Leftrightarrow \int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni γ curva chiusa di A.

ii) • per $k \geq 0$ nessuna singolarità

• per $k < 0$ unica singolarità $z_0 = -2$, polo di ordine $|k|$, $\text{res}(f(z), -2) = \begin{cases} 1 & k = -1 \\ 0 & k < -1 \end{cases}$

iii) • per $k \geq 0$ $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$ che è semplicemente connesso $\Rightarrow f(z)$ ammette primitiva in $\mathbb{C}$

• per $k = -1$ $f(z)$ non ammette primitiva nel suo insieme di definizione $\mathbb{C} - \{-2\}$ perché $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \,\text{res}(f(z), -2) = 2\pi i \neq 0$ se γ è una qualunque curva chiusa contenente -2.

• per $k < -1$ $f(z)$ ammette primitiva nel suo insieme di definizione $\mathbb{C} - \{-2\}$ perché $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni γ chiusa contenute in $\mathbb{C} - \{-2\}$ in quanto in questo caso il residuo è nullo.