compito 2 del 23-01-20

E1) Si ha $f(-\frac{5}{2}\pi)=f(\frac{5}{2}\pi)=0$, dunque $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$. Poiché è anche regolare ~~...~~ a tratti in $\mathbb{R}$ (anzi regolare in $\mathbb{R}$), la sua serie di Fourier converge totalmente in $\mathbb{R}$ e ha per somma $S(x)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

$f(x)$ è di quadrato sommabile in $[-\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ (cioè $\int_{-\frac{5}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}(f(x))^2\,dx<+\infty$) essendo continua; pertanto la sua serie di Fourier converge in media quadratica.

$$S(\tfrac{13}{5}\pi)=S(-\tfrac{12}{5}\pi)=f(-\tfrac{12}{5}\pi)=-\tfrac{12}{5}\pi\cdot\cos(\tfrac{12}{5}\pi)$$

$$S(25\pi)=S(0)=f(0)=0.$$

E2) $f(x)$ si può scrivere come

$$f(x)=\chi_{[0,4]}\cdot e^{2it}+\chi_{(4,+\infty)}e^{(1+i)t}=f_1(x)+f_2(x)$$

$\sigma[f_1]=-\infty$, $\sigma[f_2]=1$. Dunque $\sigma[f]=$

$\max\{\sigma[f_1],\sigma[f_2]\}=1.$

$$\mathcal{L}[f(t)](s)=\int_0^4 e^{(-s+2i)t}\,dt+\int_4^{+\infty}e^{(-s+1+i)t}\,dt$$

$$=\frac{e^{(-s+2i)4}}{-s+2i}-\frac{1}{-s+2i}-\frac{e^{(-s+1+i)4}}{-s+1+i}$$

E3) La serie converge in $\mathbb{C}-\{e^{2i}\}$ ($\Leftrightarrow 0<|z-e^{2i}|$)
L'unico punto singolare è $z_0=e^{2i}$, polo di ordine 2 con residuo $=c_{-1}=3$.

D1) $I_{def}=\mathbb{C}-\{3\}$, $I_{olom}=\mathbb{C}-\{z=x+iy : x\leq 3, y=0\}$
Ammette primitiva su quest'ultimo insieme perché esso è semplicemente connesso e $f(z)$ è olomorfa in I_{olom}.

D2) i) vedi compito 1

ii) per $k\leq 0$ $f(z)$ non ha singolarità

- per $k>0$ unica singolarità $z_0=-4$, polo di ordine k, $\operatorname{res}(f(z),-4)=\begin{cases}1 & k=1\\ 0 & k>1\end{cases}$

iii) • per $k\leq 0$ $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$ che è semplicemente connesso $\Rightarrow$ $f(z)$ ammette primitiva in $\mathbb{C}$.

- per $k=1$ $f(z)$ non ammette primitiva nel suo insieme di definizione $\mathbb{C}-\{-4\}$ perché $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}(f(z),-4)=2\pi i\neq 0$ se γ è una qualunque curva chiusa contenente -4.

- per $k>1$ $f(z)$ ammette primitiva nel suo insieme di definizione $\mathbb{C}-\{-4\}$ perché $\int_\gamma f(z)dz=0$ per ogni curva chiusa contenuta in $\mathbb{C}-\{-4\}$, essendo il residuo nullo.