INGEGNERIA CIVILE - AMBIENTE E TERRITORIO
ANALISI MATEMATICA II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 24-06-2019

ESERCIZIO 1
Utilizzando le formule di Green-Gauss, calcolare

$$\int_{+\partial T} x^2y^2dx + 2xydy$$

dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$.

SOLUZIONE

$$\begin{aligned}\int_{+\partial T} x^2y^2dx + 2xydy &= \iint_T (2y - 2x^2y)dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (2y - 2x^2y)dxdy \\ &= \int_0^1 \left[y^2 - x^2y^2\right]_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= \int_0^1 [(4-8x+4x^2) - x^2(4-8x+4x^2)]dx \\ &= \int_0^1 (4-8x+8x^3-4x^4)dx \\ &= \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma$$

dove V è il dominio delimitato dalle superfici $z=1$, $z=\sqrt{3}$ e $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ ed $\vec{F} = (2xz^2, \frac{4}{3}y^3, 4zx^2)$.

SOLUZIONE
Si ha $\operatorname{div}\vec{F} = 2z^2 + 4x^2 + 4y^2$ e quindi, utilizzando il teorema della divergenza e passando in coordinate cilindriche, si trova:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma &= \iiint_V (2z^2+4x^2+4y^2)dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{z/\sqrt{3}} (2z^2+4\rho^2)\rho d\rho dz d\theta \\ &= 2\pi\int_1^{\sqrt{3}} \left[z^2\rho^2+\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=z/\sqrt{3}} dz \\ &= 2\pi\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{9}z^4dz \\ &= \pi\frac{8\sqrt{3}}{5} - \pi\frac{8}{45}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{per} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{3}, \\ x & \text{per} \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi, \\ \frac{2}{3}\pi & \text{per} \quad \frac{2}{3}\pi < x \le \pi. \end{cases}$$

Esaminare la convergenza della serie ottenuta e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
La funzione è continua e quindi la serie convergerà totalmente. Si ha:

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{\pi}{3}dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} xdx + \frac{2}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{2\pi}{3}dx \\ =& \frac{2\pi}{9} + \frac{1}{\pi}\left[x^2\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} + \frac{4\pi}{9} \\ =& \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi, \end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx dx \\ =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{\pi}{3}\cos kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} x\cos kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{2\pi/3}^{\pi} \frac{2\pi}{3}\cos kx dx \\ =& \frac{2}{3}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi/3} + \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} + \frac{4}{3}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{2\pi/3}^{\pi} \\ =& \frac{2\sin\frac{k\pi}{3}}{3k} + \left[\frac{4\sin\frac{2k\pi}{3}}{3k} + \frac{2\cos\frac{2k\pi}{3}}{k^2\pi} - \frac{2\sin\frac{k\pi}{3}}{3k} - \frac{2\cos\frac{k\pi}{3}}{k^2\pi}\right] - \frac{4\sin\frac{2k\pi}{3}}{3k} \\ =& \frac{2}{k^2\pi}\left[\cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi}\left[\cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3}\right]\cos kx = f(x),$$

con convergenza totale.

OSSERVAZIONE. La funzione $f(x) - \frac{\pi}{2}$ è *dispari* rispetto al punto $\frac{\pi}{2}$ e questo implica che $a_{2m} = 0$ per $m \ge 1$. In effetti, utilizzando l'identità

$$\begin{aligned} \cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3} &= \cos\left(k\pi - \frac{k\pi}{3}\right) - \cos\frac{k\pi}{3} \\ &= (-1)^k\cos\frac{k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k \text{ pari} \\ -2\cos\frac{k\pi}{3} & \text{per} \quad k \text{ dispari,} \end{cases} \end{aligned}$$

si trova che

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k > 0 \text{ pari} \\ \\ -\frac{4}{(2m+1)^2\pi} \cos\frac{(2m+1)\pi}{3} & \text{per} \quad k = 2m+1 \text{ dispari.} \end{cases}$$

Notiamo infine che utilizzando le formule di prostaferesi avremmo trovato l'espressione

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{4}{k^2\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{6} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ \frac{4(-1)^{m+1}}{(2m+1)^2\pi}\sin\frac{(2m+1)\pi}{6} & \text{per } k = 2m+1 \text{ dispari,} \end{cases} \end{aligned}$$

più complicata per via del fattore $(-1)^{m+1}$ ma del tutto equivalente:

$$\begin{aligned} \cos\frac{(2m+1)\pi}{3} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + m\pi - \frac{2m+1}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right)\sin\frac{(2m+1)\pi}{6} \\ &= (-1)^m \sin\frac{(2m+1)\pi}{6}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove $f(x)$ è la funzione dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore in dimensione 1. Utilizzando il metodo di separazione delle variabili e lo sviluppo dell'esercizio precedente, si trova che

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi}\left[\cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3}\right] e^{-4k^2t}\cos kx.$$

ESERCIZIO 5

Dopo aver calcolato e disegnato le caratteristiche, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + 7uu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 5x & x > 0 \\ 3x & x < 0. \end{cases}$$

E' richiesta la verifica.

SOLUZIONE

Caratteristiche: $x = x_0 + 35x_0t$ per $x_0 > 0$, $x = x_0 + 21x_0t$ per $x_0 < 0$. Soluzione in forma implicita:

$$u = \begin{cases} 5[x - 7ut] & x \ge 0 \\ 3[x - 7ut] & x < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{5x}{1+35t} & x \geq 0, \\ \frac{3x}{1+21t} & x < 0. \end{cases}$$

Verifica:

$$\text{per } x > 0 \qquad u_t + 7uu_x = \frac{-175x}{(1+35t)^2} + 7\frac{5x}{1+35t} \cdot \frac{5}{1+35t}, \quad u(x,0) = 5x;$$

$$\text{per } x < 0 \qquad u_t + 7uu_x = \frac{-63x}{(1+21t)^2} + 7\frac{3x}{1+21t} \cdot \frac{3}{1+21t}, \quad u(x,0) = 3x.$$