# FISICA

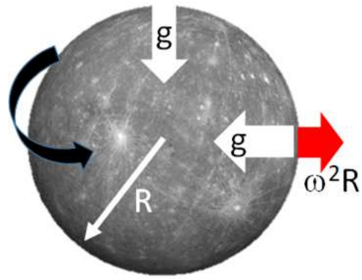
A.A. 2017-2018
Ingegneria Gestionale
*2° appello del 6 Luglio 2018*

**Esame completo**

**1.** Su un pianeta roccioso di forma sferica la massa è distribuita uniformemente con densità ρ=6200 kg/m$^3$. Sulla superficie del pianeta nella zona polare in corrispondenza dell'asse di rotazione viene misurata una accelerazione di gravità $g_p$=7.1 m$^2$/s, mentre nella regione equatoriale si osserva una diminuzione di tale valore del 1% ascrivibile alla rotazione intorno al proprio asse. Determinare il diametro del pianeta (in km) ed la durata del periodo di rotazione (in ore). [G=6.67 *10$^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$]

**1. Soluzione.**
La forza gravitazionale su una massa m posta sulla superficie del pianeta nella zona polare in corrispondenza dell'asse di rotazione vale

$$F_G = G\frac{Mm}{R^2} = mg \quad \text{da cui} \quad g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\rho V}{R^2} = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \frac{4\pi G\rho R}{3}$$

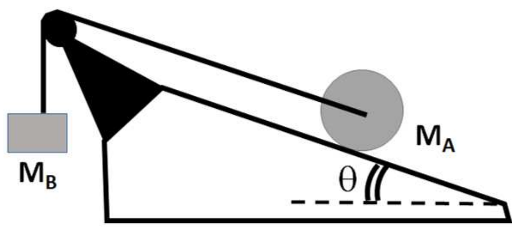



da cui si ricava il diametro del pianeta $D = 2R = \frac{3g}{2\pi G\rho} =$ **8198 km**

L'accelerazione di gravità diminuisce all'equatore a causa della forza centrifuga dovuta alla rotazione del pianeta. $g' = g - \omega^2 R = 0.99\cdot g$

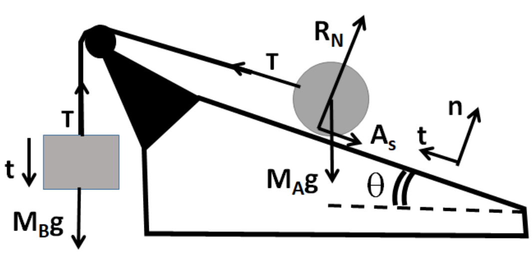
da cui $\omega = \sqrt{\frac{0.01\cdot g}{R}}$ ed il periodo di rotazione $T = 2\pi\sqrt{\frac{D}{2\cdot 0.01\cdot g}}$ **=13h 15m**

**2.** Una sfera piena di raggio *r* e di massa **M$_A$**=5kg è posto su un piano inclinato di angolo θ=25° rispetto all'orizzontale. La sfera inizialmente ferma comincia a rotolare senza strisciare lentamente verso l'alto a causa di un contrappeso di massa **M$_B$** che traina la sfera verso l'alto tramite una fune collegata all'asse della sfera. Conoscendo il valore del coefficiente di attrito statico $\mu_s$=0.1 determinare qual è il valore massimo di **M$_B$** oltre il quale la sfera comincia a strisciare [Si assuma per il momento di inerzia della sfera I=2M$_A$r$^2$/5].




**Facoltativo:** calcolare se esiste un valore minimo di **M$_B$** oltre il quale la sfera comincia a strisciare in senso opposto

**2. Soluzione. Equazioni cardinali per la sfera**
Le forze agenti sulla sfera sono:
la forza peso **M$_A$*g*** applicata nel baricentro della sfera;
la tensione **T** applicata al baricentro lungo l'asse del moto t ;
la reazione normale **R$_n$** applicata sul punto di contatto e lungo n ;
la forza di attrito statico **A$_s$** applicata sul punto di contatto e contraria al moto di salita lungo t.




La **1ª equazione cardinale** proiettata lungo gli assi *n,t*

$$\begin{matrix}\hat{t} \\ \hat{n}\end{matrix}\begin{cases} -M_A g sen\theta - A_s + T = M_A a_c \\ R_n - M_A g\cos\theta = 0 \end{cases}$$

La **2ª equazione cardinale** calcolata rispetto ad un asse per il baricentro
(solo l'attrito fornisce il momento necessario per fare rotolare la sfera)

$A_s r = I_c \dfrac{d\omega}{dt} = I_c \dfrac{a_c}{r}$ da cui $A_s = \dfrac{I_c}{r^2} a_C$ dove r è il raggio della sfera

Applicando il secondo principio alla **massa $M_B$** $M_B g - T = M_B a_c$ da cui $T = M_B (g - a_c)$

dove l'accelerazione di discesa del contrappeso coincide con quella di salita del c.d.m. del cilindro
Combinando le equazioni si ottiene: $-M_A g sen\theta - \dfrac{I_c}{r^2} a_C + M_B (g - a_c) = M_A a_c$

da cui l'accelerazione del sistema è $a_c = g \dfrac{M_B - M_A sen\theta}{M_A + M_B + I_c / r^2}$

La verifica della condizione di rotolamento è sull'attrito statico:

$A_s = \dfrac{I_c}{r^2} a_c = \dfrac{I_c}{r^2} g \dfrac{M_B - M_A sen\theta}{M_A + M_B + I_C / r^2} \le A_{max} = \mu_s R_n = \mu_s M_A g \cos\theta$ (se $M_B > M_A sen\theta$ =2.11 **kg**)

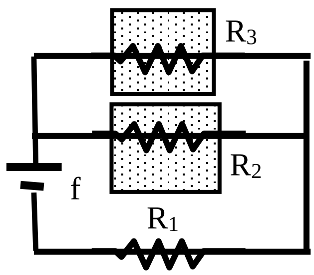
da cui $\mu_s \cos\theta \ge \dfrac{2M_B - 2M_A sen\theta}{7M_A + 5M_B}$ e la massima massa $M_B \le M_A \dfrac{7\mu_s \cos\theta + 2 sen\theta}{2 - 5\mu_s \cos\theta} =$ **4.78 kg**

**Facoltativo:** se $M_B < M_A sen\theta$=2.11 **kg** il moto di rotolamento avviene in senso inverso e la condizione sul coefficiente di attrito statico diviene

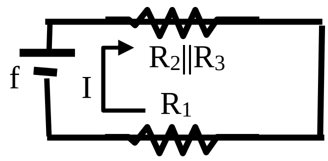
$\mu_s \cos\theta \ge \dfrac{2M_A sen\theta - 2M_B}{7M_A + 5M_B}$ da cui si ottiene la condizione sulla massa $M_B$

$M_B \ge M_A \dfrac{-7\mu_s \cos\theta + 2 sen\theta}{2 + 5\mu_s \cos\theta} =$ **0.43 kg**

**3** Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=500V. Il resistore $R_2$=3 kΩ è utilizzato come bollitore dove all'interno c'è una massa M=100g di acqua distillata da riscaldare. Il resistore $R_3$=2 kΩ, scalda invece N=0.01 kmoli di un gas monoatomico in un cilindro con un pistone di sezione A=0.5 m$^2$ tenuto alla pressione atmosferica. La resistenza $R_1$=2.8 kΩ chiude il circuito. Tutto il sistema è inizialmente tenuto a 10°C Determinare dopo 5 minuti qual'è la temperatura raggiunta rispettivamente nel bollitore e nel pistone e di quanto si è sollevato il pistone (calore specifico acqua C=4187 J/kg K, costante dei gas R=8314 J/ kmole K)




**3. Soluzione.**
Nel circuito elettrico equivalente la **intensità di corrente elettrica** erogata dalla batteria vale $I = \dfrac{f}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \dfrac{f}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} =$ **0.125 A**

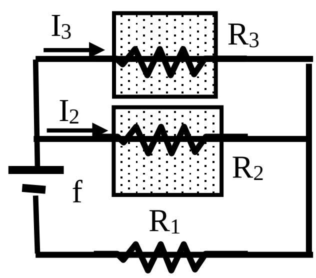



Tale corrente viene ripartita nei due resistori $R_2$ ed $R_3$ secondo la

$I_2 R_2 = I_3 R_3 = I \cdot \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ da cui $I_2 = I \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} =$ **50 mA**

mentre $I_3 = I \dfrac{R_2}{R_2 + R_3} =$ **75 mA**

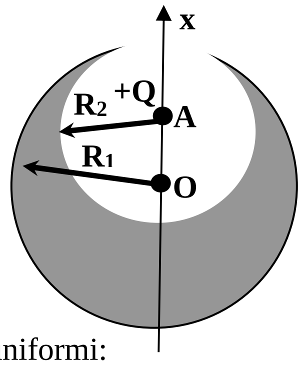
Il calore dissipato sul resistore k-esimo è dato da $Q_k = I_k^2 R_k \cdot \Delta t$



Nel bollitore la temperatura finale è data da $T = T_o + \dfrac{Q_2}{C_{acqua} \cdot M} = T_o + \dfrac{I_2^2 R_2 \cdot \Delta t}{C_{acqua} \cdot M} = \mathbf{15.37\ °C}$

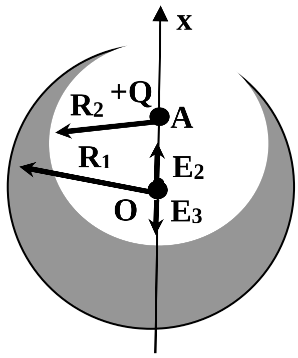
Nel pistone la temperatura finale è data da $T = T_o + \dfrac{Q_3}{\frac{5}{2} N \cdot R} = T_o + \dfrac{I_3^2 R_3 \cdot \Delta t}{\frac{5}{2} N \cdot R} = \mathbf{26.24\ °C}$

con una variazione $\Delta l = \dfrac{\Delta V}{A} = \dfrac{L_p / p_{atm}}{A} = \dfrac{NR(T - T_o)}{p_{atm} A} = \dfrac{2}{5} \dfrac{Q_3}{p_{atm} A} = \mathbf{27\ mm}$




**4.** All'interno di una sfera di centro O uniformemente carica con densità $\rho$=50mC/m$^3$ e di raggio $R_1$=10cm sono presenti una cavità sferica eccentrica di raggio $R_2$=6cm centrata nel punto A. Nello stesso punto A è posizionata una carica puntiforme positiva +Q. Determinare per quale valore di Q il campo elettrico è nullo nel centro O.

**4**. La distribuzione può pensarsi come sovrapposizione di tre distribuzioni sferiche uniformi:




(1) una distribuzione sferica di raggio $R_1$ e centro in O con densità uniforme +$\rho$ che produce un campo nullo $\mathbf{E_1=0}$ nel punto O

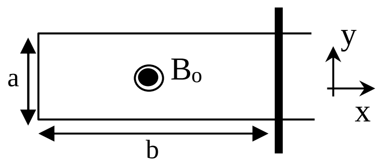
(2) una distribuzione sferica di raggio $R_2$ e centro in A con densità uniforme $-\rho$ che produce un campo elettrico $\vec{E}_2(O) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o} \vec{OA}$ nel punto O

(3) una carica puntiforme in B di carica +Q che produce un campo elettrico $E_3(O) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o (OA)^2}$ nel punto O

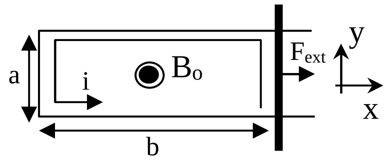
I due campi hanno stessa direzione ma senso inverso e possono annullarsi quando

$$E_2(O) = E_3(O) \text{ da cui } \frac{\rho}{3\varepsilon_o}(OA) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o (OA)^2} \text{ da cui } Q = \frac{4\pi\rho}{3}(OA)^3 = \frac{4\pi\rho}{3}(R_1 - R_2)^3 = \mathbf{13.4\ \mu C}$$

**5.** Il circuito elettrico in figura di forma rettangolare con lati *a*, *b* è disposto su un piano orizzontale *xy*. Il quarto lato del circuito è formato da una barretta mobile libera di scorrere lungo l'asse *x*. Un campo magnetico variabile nel tempo e nello spazio con legge $B_o(x,t)=A(x-k*t)$ viene applicato nella direzione z ortogonale al circuito (x=0 corrisponde al lato sinistro della spira). Determinare con quale velocità debba essere lanciata la barretta in modo che inizialmente (t=0) non ci sia corrente indotta nel circuito. Determinare inoltre doto t=10s, mantenendo tale velocità uniforme la forza elettromotrice e la corrente indotta nel circuito di resistenza R. [Dati: a=0.5cm, b=2.5m, A=1T/m, k=0.5ms$^{-1}$, R=5Ω].




**5. Flusso concatenato** con la spira




$$\Phi(\vec{B}) = A \int_0^{x(t)} (x - kt) dx \int_0^a dy = A \cdot a \cdot \left( \frac{x(t)^2}{2} - k \cdot x(t) \cdot t \right)$$

**forza elettromotrice indotta** nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -A \cdot a \cdot [x(t) \cdot v(t) - k \cdot x(t) - k \cdot t \cdot v(t)] \quad \text{che in t=0 vale} \quad f_i(0) = -A \cdot a \cdot b \cdot [v_o - k]$$

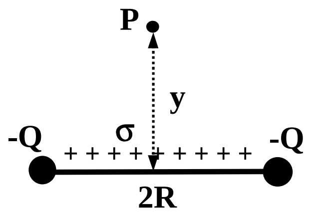
annullandosi quando la velocità di lancio è **$v_o$=k=0.5 m/s**

Mantenendo la barretta in moto rettilineo uniforme la forza elettromotrice indotta dopo t=10s diviene $f_i(t=10s) = +A \cdot a \cdot k^2 \cdot t =$ **12.5 mV**

che genera la corrente indotta dopo t=10s $i = \frac{f_i(t)}{R} = \frac{A \cdot a \cdot k^2 \cdot t}{R} =$ **2.5 mA** (ne verso come in fig.)

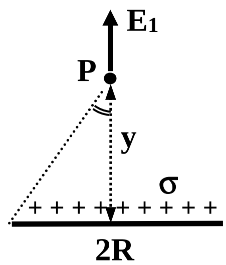
## Esercizi aggiuntivi per ESONERO

**1.** Su un disco di raggio R (ove R=10cm) viene posizionata una distribuzione uniforme di densità superficiale σ=20μC/m$^2$. Alle estremità diametralmente opposte del disco sono invece posizionate due cariche puntiformi negative di medesima carica –Q. Sapendo che sull'asse del disco P (y=20cm) è un punto in cui il campo elettrico si annulla, determinare il valore della carica -Q




### 1. Campo elettrico generato dal disco lungo l'asse y

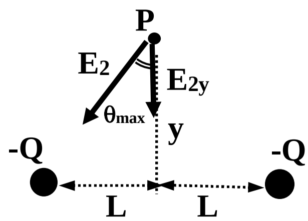
Sfruttando le simmetrie si può dimostrare che il campo elettrico del disco lungo l'asse y vale $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right)$




### Campo elettrico generato dalle cariche puntiformi

Il campo elettrico generato nel punto P da una singola carica negativa è $E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o (y^2 + R^2)}$

tuttavia a causa della presenza di una carica simmetrica il campo elettrico efficace della carica –Q si ottiene prendendo la componente lungo l'asse y




$$E_{2y} = E_2 \cos\theta_{\max} = E_2 \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}} = \frac{Q \cdot y}{4\pi\varepsilon_o (y^2 + R^2)^{3/2}}$$

Il campo totale dovuto ad entrambe le cariche viene raddoppiato per la presenza della carica simmetrica $E_{punti} = 2E_{2y} = \frac{Q \cdot y}{2\pi\varepsilon_o (y^2 + R^2)^{3/2}}$

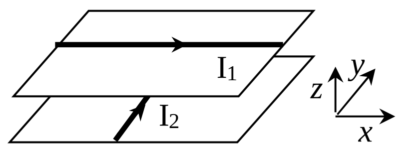
L'equilibrio si ha quando il campo generato dal segmento ha stesso modulo del campo generato dalle cariche, ma verso opposto

$$E_1 = E_{punti} \quad \text{ossia} \quad \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right) = \frac{Q \cdot y}{2\pi\varepsilon_o\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

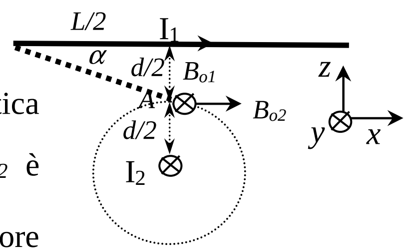
Da cui il valore assoluto delle due cariche

$$Q = \sigma\pi \frac{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}}{y}\left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right) = \sigma\pi\left[\frac{\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}}{y} - \left(y^2 + R^2\right)\right] = \mathbf{0.37\ \mu C}$$

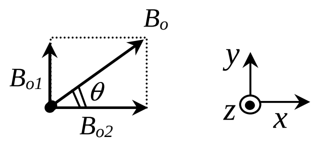
**4.** Nel vuoto due fili rettilinei di lunghezza L=1m mutuamente ortogonali, giacenti su due piani paralleli distanti $d$=10cm, sono percorsi rispettivamente dalle correnti $I_1$=6A (lungo l'asse $x$) e $I_2$=8A (lungo l'asse $y$). Calcolare il vettore induzione magnetica $\boldsymbol{B_o}$ (modulo, direzione e verso) nel punto medio $A$ del segmento che definisce la distanza minima $d$ tra i fili.




**4.** Il primo filo genera nel punto A a distanza d/2 un vettore di induzione magnetica di intensità $B_{o1} = \frac{\mu_o I_1}{2\pi(d/2)}\cos\alpha = \frac{\mu_o I_1}{\pi d}\frac{L}{\sqrt{L^2 + d^2}} =$ diretto lungo l'asse y.




Il secondo filo genera in A a istanza d/2 un vettore induzione magnetica $B_{o2} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi(d/2)}\cos\alpha = \frac{\mu_o I_2}{\pi d}\frac{L}{\sqrt{L^2 + d^2}}$ diretto lungo l'asse x (quindi $B_{o2}$ è ortogonale a $B_{o1}$). Per il principio di sovrapposizione degli effetti il vettore induzione complessivo è dato dalla somma vettoriale $\vec{B}_o = \vec{B}_{o1} + \vec{B}_{o2}$, la cui intensità vale $B_o = \sqrt{B_{o1}^2 + B_{o2}^2} = \frac{\mu_o}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2}\frac{L}{\sqrt{L^2 + d^2}} = \mathbf{3.98 \cdot 10^{-5}\ T}$.




Il vettore giace nel piano $xy$ inclinato dell'angolo $\theta = \arctan\left(\frac{B_{o1}}{B_{o2}}\right) = \arctan\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 0.64$ rad = **36°52'**