



FISICA

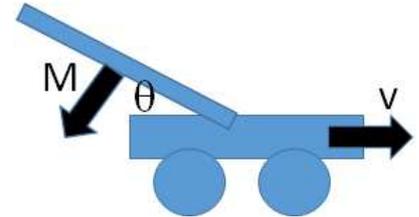
A.A. 2016-2017

Ingegneria Gestionale

2° appello del 7 Luglio 2017

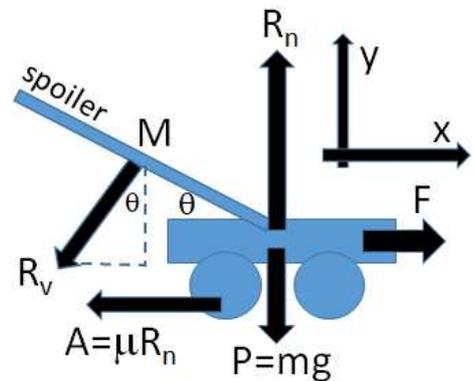
Esame completo

1. Una macchina da corsa ha montato uno spoiler ad angolo regolabile per poter aumentare il carico aerodinamico. Lo spoiler è progettato per poter fornire una forza di attrito viscoso $R_v = c \cdot \sin \theta \cdot v^2$ (con $c = 5 \text{ kg/m}$) applicata nel punto centrale M e diretta normalmente alla superficie dello spoiler. Fissato l'angolo rispetto all'orizzontale $\theta = 30^\circ$, determinare alla velocità di 250 km/h , il valore dei moduli delle forze di attrito viscoso e di quello volvente ($\mu = 0.9$) per una macchina di massa $m = 800 \text{ kg}$. Determinare inoltre la velocità limite raggiungibile dopo lungo tempo applicando una forza motrice costante orizzontale di $F = 200000 \text{ N}$.



1. La macchina è soggetta alle seguenti forze:

lungo la verticale: la forza peso $P = mg$, e la reazione normale R_n
lungo l'orizzontale l'attrito $A = \mu R_n$ contraria al moto
la forza di attrito viscoso $R_v = c \cdot \sin \theta \cdot v^2$ da scomporre lungo x, y
infine la forza motrice F diretta orizzontalmente.



Scomponendo lungo gli assi x, y

$$\begin{cases} x) & F - \mu R_n - R_v \sin \theta = ma \\ y) & R_n - mg - R_v \cos \theta = 0 \end{cases}$$

da cui la **reazione normale** $R_n = mg + R_v \cos \theta = mg + cv^2 \sin \theta \cos \theta = 18281 \text{ N}$

da cui l'**attrito volvente** $A = \mu R_n = \mu (mg + cv^2 \sin \theta \cos \theta) = 16453 \text{ N}$

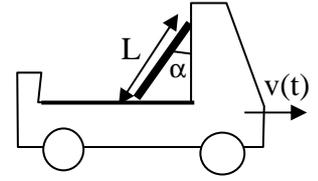
mentre la forza di **attrito viscoso** è $R_v = cv^2 \sin \theta = 12056 \text{ N}$

Dalla prima equazione lungo x , imponendo una velocità di crociera costante e quindi $a = 0$ si ottiene

$$F - \mu R_n - cv^2 \sin^2 \theta = 0 \quad \text{da cui} \quad F - \mu (mg + cv^2 \sin \theta \cos \theta) - cv^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$\text{da cui la velocità limite è } v = \sqrt{\frac{F - \mu mg}{c \sin \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta)}} = 63.6 \text{ m/s} = 229 \text{ km/h}$$

2. Una scala viene trasportata all'interno di un furgone. Essa è inclinata di un angolo $\alpha=30^\circ$ rispetto alla verticale, appoggiandosi sulla parete verticale liscia nel punto A, e sul piano orizzontale scabro nel punto B ($\mu_{sB}=0.5$), in modo da restare in equilibrio quando il furgone è fermo. Quando il furgone parte deve muoversi con cautela. Determinare quale sia la accelerazione massima ammissibile in partenza affinché la scala permanga in equilibrio.



2. Analisi delle forze.

Le forze agenti sulla scala sono e seguenti:

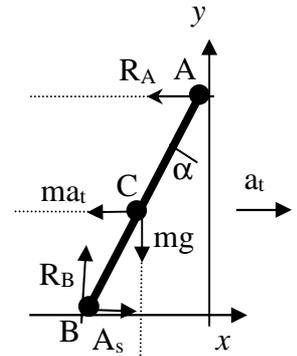
il peso della scala $\mathbf{P}=\mathbf{mg}$ applicato nel baricentro C a metà della scala.

la forza apparente $\mathbf{F}_{app}=\mathbf{ma}_t$ in C (in senso opposto alla accelerazione di partenza)

reazione normale \mathbf{R}_B nel punto di contatto B

la forza di attrito statico orizzontale \mathbf{A}_s nel punto B

la reazione \mathbf{R}_A applicata sulla parete verticale nel punto A



In condizioni statiche la somma di tutte le forze deve annullarsi (1^a equazione cardinale) come anche la somma di tutti i momenti delle forze (2^a equazione cardinale).

$$\mathbf{1^a equazione cardinale:} \quad \begin{cases} x) & -R_A - F_{app} + A_s = 0 \\ y) & R_B - P = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A_s = R_A + ma_t \\ R_B = mg \end{cases}$$

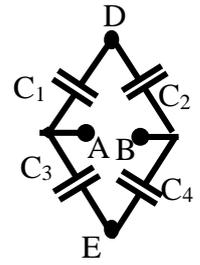
2^a equazione cardinale (calcolata rispetto a B)

$$M_P + M_{F_{app}} + M_{R_A} = 0 \quad \text{da cui} \quad mg \frac{L}{2} \sin \alpha - ma_t \frac{L}{2} \cos \alpha - R_A L \cos \alpha = 0$$

$$\text{da cui} \quad R_A = \frac{m}{2}(g \cdot \operatorname{tg} \alpha - a_t), \quad \text{e l'attrito} \quad A_s = \frac{mg}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{ma_t}{2} \leq A_{\max} = \mu_s R_B = \mu_s mg$$

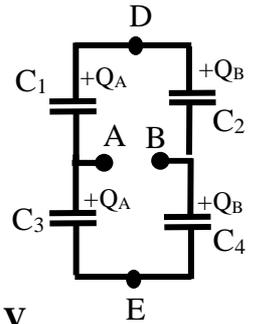
l'**accelerazione massima** è quindi $a_t \leq g(2\mu_s - \operatorname{tg} \alpha) = 4.14 \text{ m/s}^2$

3. Un ponte elettrico formato da sole capacità è alimentato da una batteria che mantiene costante la differenza di potenziale $V_D - V_E = 20V$. Calcolare la carica presente su ciascun condensatore e la differenza di potenziale $V_A - V_B$. **Facoltativo:** determinare quale nuovo valore della capacità C_3 realizza un bilanciamento del ponte ($V_A = V_B$). [Dati: $C_1 = 4\mu F$, $C_2 = 4\mu F$, $C_3 = 10\mu F$, $C_4 = 8\mu F$]



3. Lo stato di carica dei condensatori è determinato dal processo di carica che avviene dai capi D ed E del ponte. In questo caso la coppia di condensatori (C_1, C_3) è in serie come anche la coppia (C_2, C_4). La carica su ciascuna coppia è quindi:

$$Q_A = (V_D - V_E) \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = 57.1 \mu C, \quad Q_B = (V_D - V_E) \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = 53.3 \mu C$$



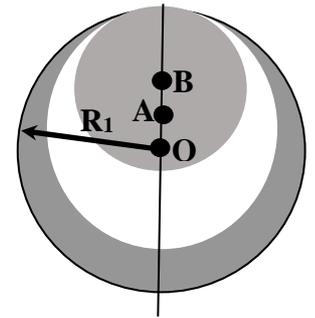
$$V_A - V_B = (V_D - V_E) - (V_D - V_A) = \frac{Q_B}{C_2} - \frac{Q_A}{C_1} = (V_D - V_E) \left(\frac{C_4}{C_2 + C_4} - \frac{C_3}{C_1 + C_3} \right) = -0.95 V$$

Facoltativo:

il ponte è in equilibrio quando $V_A = V_B$ e conseguentemente

$$\frac{C_4}{C_2 + C_4} = \frac{C_3}{C_1 + C_3} \quad \text{ossia} \quad C_3 = \frac{C_1 C_4}{C_2} = 8 \mu F$$

4. All'interno di una sfera di centro O uniformemente carica con densità $\rho=100\text{mC/m}^3$ e di raggio $R_1=10\text{cm}$ sono presenti una cavità sferica eccentrica di raggio $R_2=8\text{cm}$ centrata nel punto A, ed una sfera piena con densità uniforme ρ di raggio $R_3=6\text{cm}$ con centro in B in modo che le tre sfere siano tangenti nello stesso punto (vedi figura) Determinare il valore del campo elettrico nei punti O,A,B e la differenza di potenziale V_B-V_O



4. La distribuzione può pensarsi come sovrapposizione di tre distribuzioni sferiche uniformi:

- (1) una distribuzione sferica di raggio R_1 e centro in O con densità uniforme $+\rho$
- (2) una distribuzione sferica di raggio R_2 e centro in A con densità uniforme $-\rho$
- (3) una distribuzione sferica di raggio R_3 e centro in B con densità uniforme $+\rho$

I punti sotto studio sono interni a tutte e tre le sfere. Ciascuna distribuzione genera un campo elettrico all'interno $\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$ (dimostrabile applicando la legge di Gauss) dove r è il raggio che collega il centro della distribuzione sferica con il punto generico P.

Il campo elettrico E_1 generato dalla prima distribuzione ($+\rho$) in P è quindi $\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OP}$

Il campo elettrico E_2 generato dalla seconda distribuzione ($-\rho$) in P è quindi $\vec{E}_2 = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{AP}$

Il campo elettrico E_3 generato dalla seconda distribuzione ($+\rho$) in P è quindi $\vec{E}_3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{BP}$

Il campo elettrico totale è quindi : $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OP} + \vec{PA} + \vec{BP}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OP} + \vec{BA})$

Che proiettato sull'asse delle x vale $E_{tot,x} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (x - AB) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} [x - (R_2 - R_3)]$

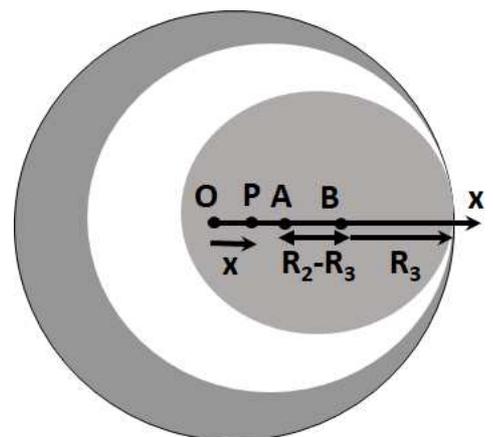
$$E(O) = -7.54 \cdot 10^7 \text{ V/m}$$

$$E(A) = 0 \text{ V/m}$$

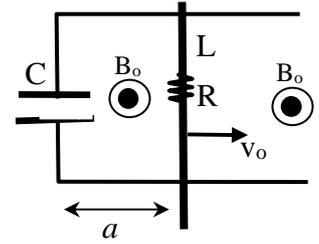
$$E(B) = +7.54 \cdot 10^7 \text{ V/m}$$

La differenza di potenziale vale

$$\begin{aligned} V_B - V_O &= \int_{R_1-R_3}^0 E_{tot} dx = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int_{R_1-R_3}^0 [x - (R_2 - R_3)] dx \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{x^2}{2} - (R_2 - R_3)x \right]_{R_1-R_3}^0 = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R_1 - R_3)(2R_2 - R_1 - R_3) = 0 \text{ V} \end{aligned}$$

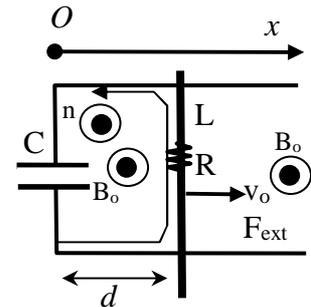


5. Una barretta metallica di lunghezza $L=10\text{cm}$ è libera di spostarsi lungo una guida metallica giacente su un piano orizzontale in modo da formare un circuito elettrico di forma rettangolare con resistenza $R=10\Omega$, chiusa su un condensatore di capacità $C=100\mu\text{F}$ inizialmente scarico. Nella regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale di induzione $B_o=3\text{T}$. Assumendo di muovere la barretta, inizialmente posizionata in $x_o=a=10\text{cm}$, di moto rettilineo uniforme con velocità $v_o=2\text{m/s}$ lungo l'asse x determinare la legge di carica del condensatore, in particolare dare il valore della carica presente dopo 0.5ms e dopo lungo tempo. Determinare anche l'energia nel condensatore e quella persa sulla resistenza dopo 0.5ms .



5. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira \hat{n} abbia la stessa direzione e verso di \vec{B}_o , si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c :

$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS = B_o \int_0^x dx \int_0^L dy = B_o L \cdot x(t)$$



Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L \cdot v_o$ che è negativa (la corrente tende quindi a circolare quindi in senso inverso)

Oltre alla forza elettromotrice indotta è anche presente una capacità inizialmente scarica.

$$i(t)R + \frac{q(t)}{C} = +B_o L v_o \quad \text{con soluzione} \quad q(t) = B_o L v_o C [1 - \exp(-t/RC)]$$

(il condensatore ha tensione negativa)

La **carica sul condensatore dopo lungo tempo** è $q_\infty = B_o L v_o C = 60 \mu\text{C}$

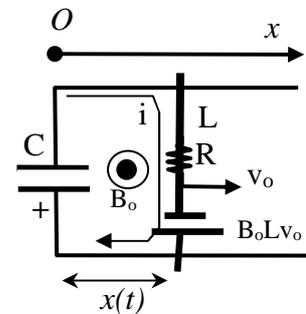
La **carica** dopo $t=0.5\text{ms}$ durante la carica è invece **23.6 μC**

L'**energia immagazzinata nel condensatore**

$$E_C = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2 C}{2} [1 - \exp(-t/RC)]^2 = 2.79 \mu\text{J}$$

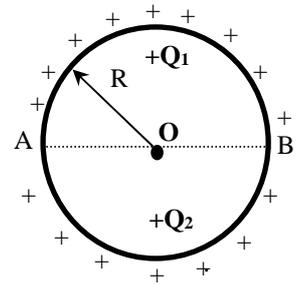
L'**energia dissipata per effetto Joule sulla resistenza**

$$E_R = \int_0^t i^2 R dt = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2}{R} \int_0^t \exp(-2t/RC) dt = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2 C}{2} [1 - \exp(-2t/RC)] = 11.4 \mu\text{J}$$



ESERCIZI SOSTITUTIVI DELLA MECCANICA PER PROVA di ESONERO

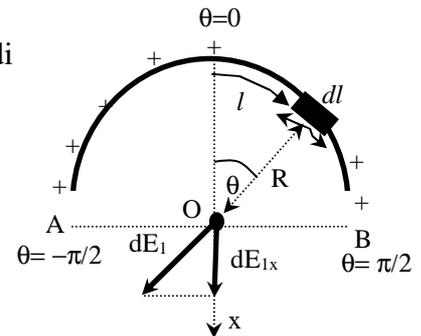
1. Della carica elettrica viene posizionata lungo un anello circolare di raggio $R=10\text{cm}$ in modo che la carica positiva $Q_1=10\mu\text{C}$ venga distribuita uniformemente lungo metà anello e quella $Q_2=4\mu\text{C}$ venga distribuita uniformemente lungo l'altra metà. Si calcoli il vettore campo elettrico e potenziale generato nel punto centrale dell'anello O .



1. La distribuzione complessiva viene vista come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica disposte su semicirconferenze

Campo elettrico e potenziale generato da una semicirconferenza

Q_1 è distribuita sulla semicirconferenza con densità lineare uniforme $\lambda_1 = Q_1/\pi R$.



La carica disposta nel tratto $d\ell = R d\theta$, vale $dq = \lambda_1 d\ell = \lambda_1 R d\theta$

e genera nel punto O un contributo $dE_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} d\theta$ lungo la direzione in figura

Per ragioni di simmetria il campo elettrico risultante sarà diretto lungo l'asse delle x per cui

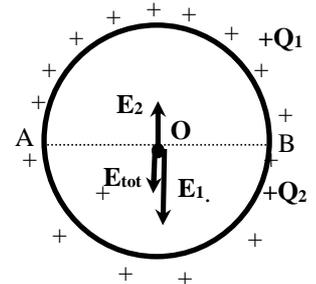
$$E_1 = E_{1,x} = \int dE_{1,x} = \int dE_1 \cos\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin\theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_1}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

Il **potenziale elettrico generato nel punto O** è invece $V_1 = \int dV_1 = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R}$

Campo elettrico generato dall'intero anello

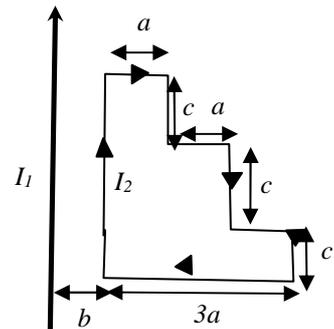
Il secondo semianello genera in O un secondo campo elettrico E_2 controverso che si calcola con la stessa formula dimostrata precedentemente e che si

sottrae ad E_1 per cui $E_{tot} = E_1 - E_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} = 3.44 \cdot 10^6 \text{ V/m}$



Mentre il potenziale totale si ottiene sommando scalarmente $V_{tot} = V_1 + V_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = 1.26 \cdot 10^6 \text{ V}$

4. Una spira planare rigida a forma di scala (come indicata in figura) è percorsa dalla corrente continua I_2 . La spira è complanare ad un filo infinitamente lungo percorso dalla corrente continua I_1 . Determinare per questa geometria riportata in figura il modulo la direzione ed il verso della forza netta agente sulla spira. (eventuali forze opposte che si generano su alcuni tratti della spira possono essere non calcolate) [Dati: $I_1=2\text{mA}$, $I_2=4\text{mA}$, $a=2\text{cm}$, $b=3\text{cm}$ $c=2\text{cm}$]



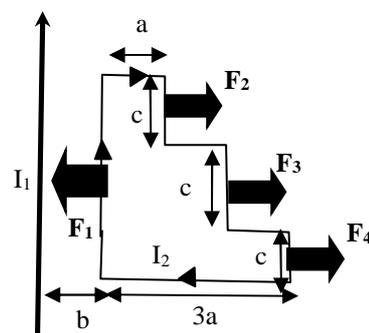
4. Forze agenti su una spira rettangolare dovute al primo filo

Il vettore induzione magnetica \mathbf{B}_1 generato dalla corrente I_1 vale in tutto lo

spazio $B_1 = \frac{\mu_o}{2\pi x} I_1$ ove x è la distanza dal primo filo (Biot Savart).

Ciascun tratto della spira percorsa dalla corrente I_2 è soggetto ad una forza verso l'esterno della spira (a causa del verso delle correnti) descritte dalla 2^a formula di Laplace $\vec{F} = I_2 \int d\vec{l} \times \vec{B}_1$.

Le forze sui lati orizzontali della spira sono uguali ed opposte e si bilanciano. Sono invece non compensate le forze sui lati verticali



$$F_1 = B_1 I_2 (3c) = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_1 I_2 (3c) = 3.2 \cdot 10^{-12} \text{ N (attrattiva)}$$

$$F_2 = B_1 I_2 c = \frac{\mu_o}{2\pi(a+b)} I_1 I_2 c = 0.64 \cdot 10^{-12} \text{ N (repulsiva)}$$

$$F_3 = B_1 I_2 c = \frac{\mu_o}{2\pi(2a+b)} I_1 I_2 c = 0.46 \cdot 10^{-12} \text{ N (repulsiva)}$$

$$F_4 = B_1 I_2 c = \frac{\mu_o}{2\pi(3a+b)} I_1 I_2 c = 0.36 \cdot 10^{-12} \text{ N (repulsiva)}$$

La risultante è attrattiva $F^{tot} = F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = 1.75 \cdot 10^{-12} \text{ N}$