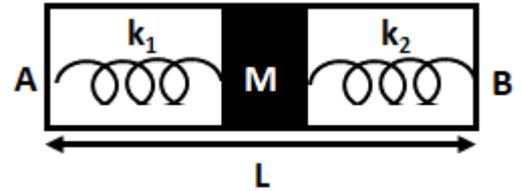




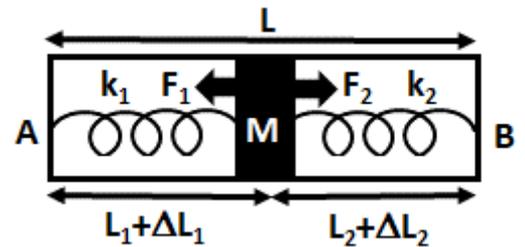
Università di Roma "La Sapienza"
 Facoltà di Ingegneria
 FISICA

A.A. 2019-2020
 Ingegneria Gestionale
 2° appello del 20 Luglio 2020

1. Un blocco di massa $M=2\text{kg}$ è posizionato dentro un tubo rigido di lunghezza $L=2\text{m}$ collegato a due molle di lunghezze a riposo $L_1=80\text{cm}$ ed $L_2=100\text{cm}$, con costanti elastiche rispettivamente $k_1=200\text{N/m}$ e $k_2=300\text{N/m}$ collegate agli estremi A e B del tubo. Determinare gli allungamenti delle due molle quando il tubo AB è posizionato in orizzontale e quando il tubo è posizionato in verticale con A punto più in alto. Infine in una configurazione in cui il tubo ruota in un piano orizzontale con centro in A, determinare anche per quale valore del periodo di rotazione la molla k_2 non risulta più allungata.



1. Nella **configurazione orizzontale** entrambe le molle sono allungate poiché $L_1+L_2 < L$
 L'allungamento complessivo è quindi
 $\Delta L_{tot} = L - (L_1 + L_2) = 20\text{cm}$

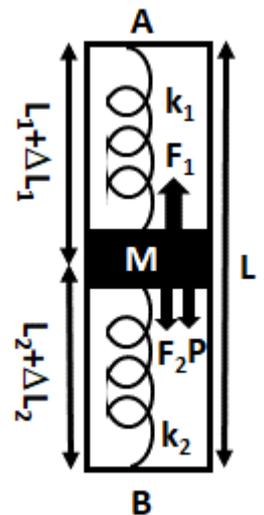


Imponendo l'equilibrio delle forze elastiche delle due molle, e considerando che l'allungamento complessivo è la somma degli allungamenti delle singole molle si ottiene il sistema di due equazioni nelle due incognite ΔL_1 e ΔL_2

$$\begin{cases} k_1 \Delta L_1 = k_2 \Delta L_2 \\ \Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta L_{tot} \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} \Delta L_1 = \Delta L_{tot} \frac{k_2}{k_1 + k_2} = 12\text{cm} \\ \Delta L_2 = \Delta L_{tot} \frac{k_1}{k_1 + k_2} = 8\text{cm} \end{cases}$$

Nella **configurazione verticale** viene aggiunta la forza peso $P=Mg$ ed il sistema di equazioni diviene

$$\begin{cases} k_1 \Delta L_1 = k_2 \Delta L_2 + Mg \\ \Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta L_{tot} \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} \Delta L_1 = \frac{k_2 \Delta L_{tot} + Mg}{k_1 + k_2} = 15.9\text{cm} \\ \Delta L_2 = \frac{k_1 \Delta L_{tot} - Mg}{k_1 + k_2} = 4.1\text{cm} \end{cases}$$

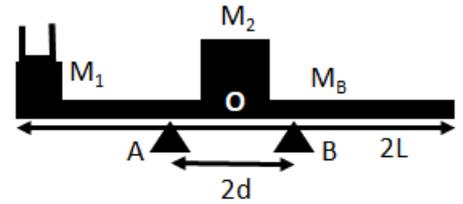


Nella **configurazione in cui il tubo ruota in orizzontale rispetto al centro A**, viene aggiunta la forza centrifuga $F=M\omega^2(L_1+\Delta L_1)$ ed il sistema di equazioni diviene

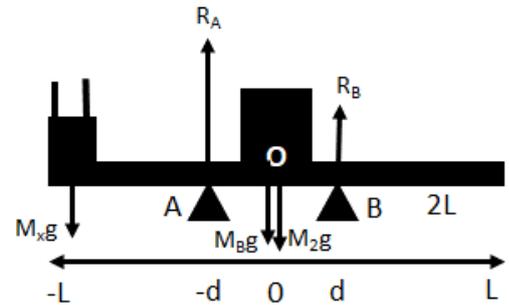
$$\begin{cases} k_1 \Delta L_1 = k_2 \Delta L_2 + M\omega^2(L_1 + \Delta L_1) \\ \Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta L_{tot} \end{cases} \text{ che nel caso } \Delta L_2=0, \Delta L_1=\Delta L_{tot}=20\text{ cm}$$

da cui si trova la velocità angolare ed il **periodo di rotazione** $T = 2\pi \sqrt{\frac{M(L_1 + \Delta L_{tot})}{k_1 \Delta L_{tot}}} = 1.405\text{ s}$

2. Una barra di massa $M_B=5\text{kg}$ e di lunghezza $2L=10\text{m}$ è poggiata orizzontalmente su due sostegni A e B distanziati $2d=4\text{m}$. Un blocco $M_2=10\text{kg}$ è collocato al centro della barra O, coincidente anche con il punto di mezzo di AB, in modo da stabilizzare il sistema. Un altro blocco $M_1=6\text{kg}$ è posizionato invece in un estremo della barra. Dimostrare che il sistema è in equilibrio e determinare le reazioni vincolari su A e B. Sulla sommità del blocco M_1 si trova però un contenitore inizialmente vuoto che raccoglie acqua piovana. Sapendo che in un certo istante $t=0$ si scatena una bomba d'acqua in grado di riempire il contenitore con un rate costante di $2\text{cm}^3/\text{s}$, determinare dopo quanto tempo il sistema si capovolgerà a causa del peso imprevisto dell'acqua.



2. Per la statica del sistema è necessario che siano contemporaneamente nulle le due equazioni cardinali $\begin{cases} F = 0 \\ M_O = 0 \end{cases}$ (il momento viene calcolato per semplicità rispetto ad un asse per il punto O). La convenzione adottata è che hanno momento positivo le forze che produrrebbero rotazioni antiorarie rispetto ad O)



$$\begin{cases} R_A + R_B - M_x g - M_2 g - M_B g = 0 \\ M_x g L - R_A d + R_B d = 0 \end{cases}$$

dove $M_x = M_1 + \rho \cdot r \cdot T$ è la massa del blocco M_1 con l'aggiunta della massa del contenitore che si sta riempiendo d'acqua con il rate r al passare del tempo T ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ è la densità dell'acqua)

da cui si ottiene $\begin{cases} R_A = \frac{1}{2} \left[M_x \left(1 + \frac{L}{d} \right) + M_2 + M_B \right] g \\ R_B = \frac{1}{2} \left[M_x \left(1 - \frac{L}{d} \right) + M_2 + M_B \right] g \end{cases}$

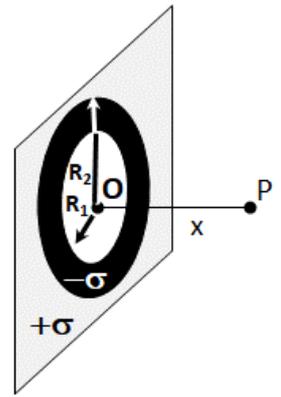
In assenza d'acqua $M_x = M_1$ le due reazioni normali valgono $\begin{cases} R_A = 176.4 \text{ N} \\ R_B = 29.4 \text{ N} \end{cases}$. In queste condizioni il

sistema è in equilibrio. Viceversa quando il recipiente si riempie d'acqua la reazione R_B diminuisce. Quando $R_B < 0$ il sistema esce dall'equilibrio e la barra si ribalta. Ciò avviene quando

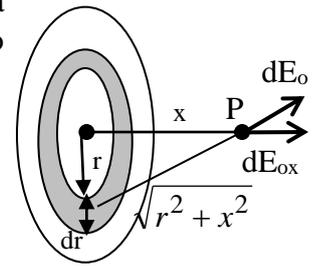
$$M_x = (M_2 + M_B) \frac{d}{L-d} = 10 \text{ kg}$$

Ciò avviene al tempo $T = \left[(M_2 + M_B) \frac{d}{L-d} - M_1 \right] \frac{1}{\rho \cdot r} = 2000 \text{ s} = 33' 20''$

3. In un foglio isolante, piano, indefinito, carico con densità superficiale uniforme $+\sigma$, è praticato un foro circolare di centro O e di raggio $R_1=2\text{cm}$, ed è anche presente una corona circolare di centro in O e di raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2=5\text{cm}$ carica con densità superficiale opposta $-\sigma$. Individuare se sull'asse per O ortogonale al piano esista un punto P (OP= x) dove si annulla il campo elettrico, oltre al caso banale $x=0$.



3. La distribuzione di carica indicata in figura può vedersi come una opportuna sovrapposizione di anelli di superficie $dS = 2\pi r dr$ sui quali è distribuita la carica $dq=2\pi\sigma r dr$ che generano un contributo elementare dE_{ox} di campo elettrico nel punto P che per ragioni di simmetria risulta diretto lungo l'asse x



$$dE_{ox} = dE_o \cos \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_o (r^2 + x^2)} \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_o} \frac{x \cdot r \cdot dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Integrando i contributi provenienti da tutti gli anelli si ottiene:

$$E(x) = \int dE_{ox} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

che risponde all'anello a carica negativa

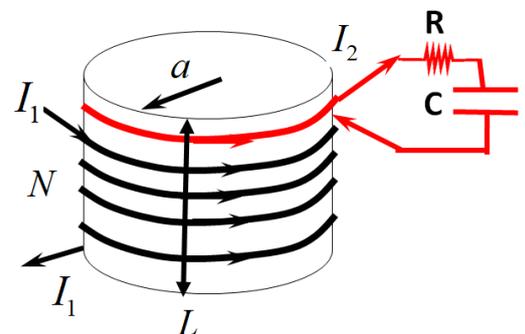
fra R_1 e R_2 e quello a carica positiva per $r > R_2$. Avendo dall'analisi $\int \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} + c$

$$E(x) = \frac{-\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_{R_2}^{\infty} = \frac{\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \left\{ \frac{2}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} \right\}$$

Il campo elettrico si annulla (oltre che per $x=0$) quando $2\sqrt{x^2 + R_1^2} = \sqrt{x^2 + R_2^2}$

$$\text{ossia per } x = \pm \sqrt{\frac{R_2^2 - 4R_1^2}{3}} = \pm 1.73 \text{ cm}$$

4. Un solenoide con concentrazione di spire ($N=100$ spire, e lunghezza del solenoide $L=20$ cm) è percorso dalla corrente variabile $I_1=I_0 [1-t/T_1]$ (con $I_0=1\text{A}$ e $T_1=50\text{ms}$) nel verso indicato in figura. All'interno del solenoide c'è un nucleo di ferro dolce a sezione circolare di raggio $a=4$ cm e di permeabilità magnetica relativa $\mu_r=1000$. Un circuito secondario è formato da una unica spira circolare che avvolge lo stesso nucleo di ferro, chiusa da un resistore $R=20\Omega$ ed una capacità $C=100\mu\text{F}$ inizialmente scarica. Trascurando i fenomeni di autoinduzione, determinare le espressioni temporali della corrente indotta e della carica sulla capacità del secondario, calcolando la corrente iniziale e la carica asintotica finale.



4. Il vettore induzione magnetica generato all'interno del solenoide percorso dalla corrente I_1 ha intensità uniforme pari a

$$B_1 = \mu_o \mu_r \frac{N}{L} I_1 = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L} \left(1 - \frac{t}{T_1}\right).$$

Per il calcolo del flusso concatenato viene scelto il verso di percorrenza nella spira in modo che la normale alla spira \hat{n} abbia lo stesso verso di \vec{B}_1 . Il flusso concatenato diviene quindi:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS = \int B_1 dS = B_1 \cdot S_{\text{ext}} = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L} \left(1 - \frac{t}{T_1}\right) \pi a^2$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola

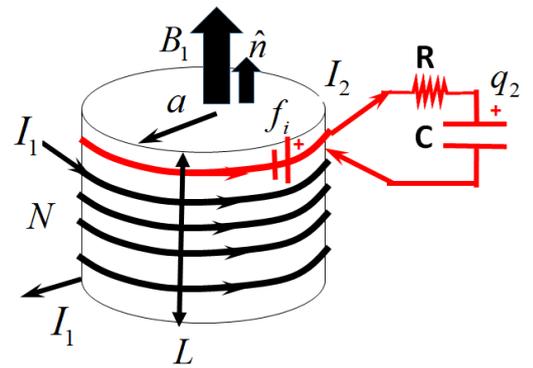
la **forza elettromotrice indotta nella spira** costante $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot T_1} \pi a^2 = \mathbf{63.2 \text{ mV}}$

causando nel circuito RC la **corrente indotta** $I_2(t) = \frac{f_i}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot R \cdot T_1} \pi a^2 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

con valore iniziale della corrente indotta $I_2(0) = \frac{f_i}{R} = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot R \cdot T_1} \pi a^2 = \mathbf{3.16 \text{ mA}}$.

La **carica elettrica nel condensatore** si accumula con legge $q_2(t) = f_i C \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$

Raggiungendo il valore limite asintotico $q_2(\infty) = f_i C = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot T_1} \pi a^2 C = \mathbf{6.32 \text{ }\mu\text{C}}$.

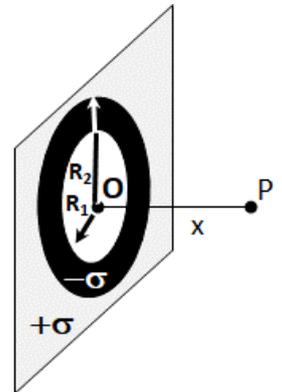




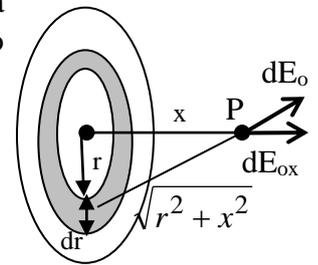
Università di Roma "La Sapienza"
 Facoltà di Ingegneria
 FISICA

A.A. 2019-2020
 Ingegneria Gestionale
 2° esonero del 20 Luglio 2020

1. In un foglio isolante, piano, indefinito, carico con densità superficiale uniforme $+\sigma$, è praticato un foro circolare di centro O e di raggio $R_1=2\text{cm}$, ed è anche presente una corona circolare di centro in O e di raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2=5\text{cm}$ carica con densità superficiale opposta $-\sigma$. Individuare se sull'asse per O ortogonale al piano esista un punto P ($OP=x$) dove si annulla il campo elettrico, oltre al caso banale $x=0$.



1. La distribuzione di carica indicata in figura può vedersi come una opportuna sovrapposizione di anelli di superficie $dS = 2\pi r dr$ sui quali è distribuita la carica $dq = 2\pi\sigma r dr$ che generano un contributo elementare dE_{ox} di campo elettrico nel punto P che per ragioni di simmetria risulta diretto lungo l'asse x



$$dE_{ox} = dE_o \cos\theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_o(r^2 + x^2)} \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_o} \frac{x \cdot r \cdot dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Integrando i contributi provenienti da tutti gli anelli si ottiene:

$$E(x) = \int dE_{ox} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} + \int_{R_2}^{\infty} \frac{\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

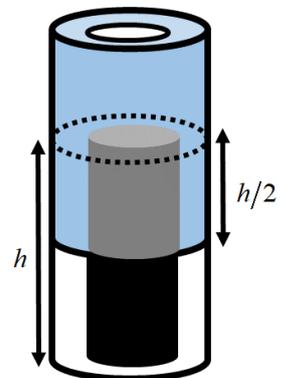
che risponde all'anello a carica negativa fra R_1 e R_2 e quello a carica positiva per $r > R_2$. Avendo dall'analisi $\int \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} + c$

$$E(x) = \frac{-\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_{R_2}^{\infty} = \frac{\sigma \cdot x}{2\epsilon_o} \left\{ \frac{2}{\sqrt{x^2 + R_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_1^2}} \right\}$$

Il campo elettrico si annulla (oltre che per $x=0$) quando $2\sqrt{x^2 + R_1^2} = \sqrt{x^2 + R_2^2}$

$$\text{ossia per } x = \pm \sqrt{\frac{R_2^2 - 4R_1^2}{3}} = \pm 1.73 \text{ cm}$$

2. Un condensatore cilindrico è formato da due armature metalliche cilindriche concentriche di raggio interno $R_1=2\text{cm}$ e raggio esterno $R_2=4\text{cm}$ ed altezza $h=25\text{cm}$. Nell'intercapedine il condensatore è parzialmente riempito da una lastra dielettrica cilindrica (vedi figura) di costante dielettrica relativa $\epsilon_r=7$, che penetra fino ad una altezza di $h/2$ ricoprendo il 50% dello spazio disponibile. Sapendo che in tale configurazione l'energia elettrostatica nel condensatore è $E=100\text{J}$, determinare la forza con cui la lastra dielettrica è risucchiata all'interno.



2. Il condensatore può pensarsi come costituito da due condensatori connessi in parallelo di capacità (parte con dielettrico) $C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r x}{\ln(R_2/R_1)}$

(parte senza dielettrico) $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0(h-x)}{\ln(R_2/R_1)}$

ove $x=h/2$ indica il grado di inserzione del dielettrico

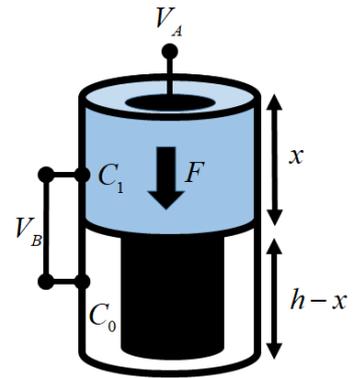
La capacità totale vale quindi $C_{tot}(x) = C_1 + C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} [h + x(\epsilon_r - 1)]$

L'energia immagazzinata $U_{el}(x) = \frac{Q^2}{2C_{tot}(x)}$ risulta dipendente dal grado di inserzione x

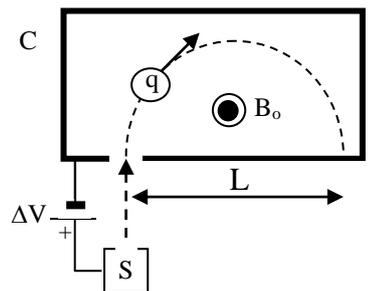
Si sviluppa una forza che tende a portare la lastra nella posizione di minima energia $\vec{F} = -\nabla U_{el}(x)$

da cui la **forza** vale $F_x = -\frac{dU_{el}}{dx} = -\frac{Q^2}{2} \frac{d(C_{tot}^{-1})}{dx} = \frac{Q^2}{2C_{tot}^2} \frac{dC_{tot}}{dx} = \frac{Q^2}{2C_{tot}} \left(\frac{1}{C_{tot}} \frac{dC_{tot}}{dx} \right) = E \left(\frac{\epsilon_r}{h + x(\epsilon_r - 1)} \right)$

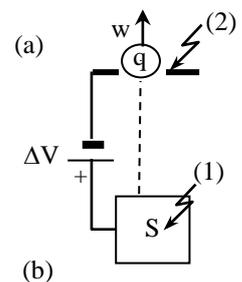
che calcolata per $x=h/2$ porta al valore $F_x = E \left[\frac{2\epsilon_r}{h(\epsilon_r + 1)} \right] = 700 \text{ N}$



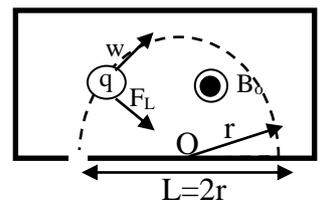
3. Per misurare le masse degli ioni, Dempster utilizzò il dispositivo in figura. Nella camera S viene prodotto uno ione di carica $+q$ e di massa m praticamente in quiete. Lo ione viene quindi accelerato dalla differenza di potenziale ΔV fino ad entrare, da una fenditura, nella camera C dove è presente solo un vettore di induzione magnetica B_o , uniforme e diretto come in figura. Nella camera C lo ione descrive un arco di circonferenza fino ad urtare la parete della camera a distanza L dalla fenditura. In questa configurazione uno ione idrogeno H^+ entrando nel dispositivo impatta ad una distanza $L=50\text{cm}$. Abbassando il voltaggio del 19%, raddoppiando il campo magnetico determinare il nuovo punto di impatto di uno ione deuterio D^+ di massa doppia rispetto allo ione idrogeno.



3. Lo ione generato nella camera S parte inizialmente di moto rettilineo uniformemente accelerato dalla differenza di potenziale ΔV . Lo ione acquista energia cinetica dalla posizione (1), alla posizione (2) di ingresso alla camera C (fig.a). Applicando la legge di conservazione dell'energia nelle due posizioni si ottiene $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ dove $U=qV$ è l'energia potenziale dello ione. Avendo inizialmente energia cinetica nulla, l'equazione diventa $K_2 = q(V_1 - V_2) = q\Delta V$ da cui si ricava la velocità di ingresso $w = \sqrt{2K_2/m} = \sqrt{2q\Delta V/m}$.



Nella camera C lo ione subisce una forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{w} \times \vec{B}_o$, centripeta, che è causa di un moto circolare uniforme (fig.b). Applicando il II principio la forza di Lorentz produce l'accelerazione normale del moto $F_L = qwB_o = ma_n = mw^2/r$, da cui si ricava il diametro della circonferenza $L = 2r = 2mw/(qB_o)$. La velocità w all'interno della camera C è in modulo costante e pari alla velocità di ingresso w da cui si ricava l'espressione della

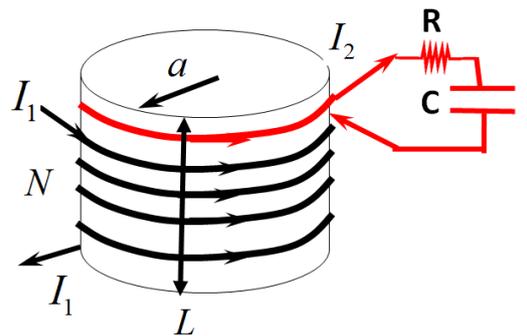


posizione finale di impatto dello ione di idrogeno H⁺: $L_H = \sqrt{\frac{8m\Delta V}{qB_o^2}}$

Nel caso dello ione deuterio D⁺ la massa ed il campo magnetico raddoppiano, mentre la d.d.p. si riduce al 81% del valore iniziale. La **posizione di impatto dello ione deuterio D⁺** diviene quindi

$$L_D = \sqrt{\frac{8(2m)(0.81\Delta V)}{q(2B_o)^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.81}{4}} L_H = 0.636 \cdot L_H = \mathbf{31.8 \text{ cm}}$$

4. Un solenoide con concentrazione di spire (N=100 spire, e lunghezza del solenoide L=20 cm) è percorso dalla corrente variabile $I_1=I_o [1-t/T_1]$ (con $I_o=1A$ e $T_1=50ms$) nel verso indicato in figura. All'interno del solenoide c'è un nucleo di ferro dolce a sezione circolare di raggio $a=4 \text{ cm}$ e di permeabilità magnetica relativa $\mu_r=1000$. Un circuito secondario è formato da una unica spira circolare che avvolge lo stesso nucleo di ferro, chiusa da un resistore $R=20\Omega$ ed una capacità $C=100\mu F$ inizialmente scarica. Trascurando i fenomeni di autoinduzione, determinare le espressioni temporali della corrente indotta e della carica sulla capacità del secondario, calcolando la corrente iniziale e la carica asintotica finale.

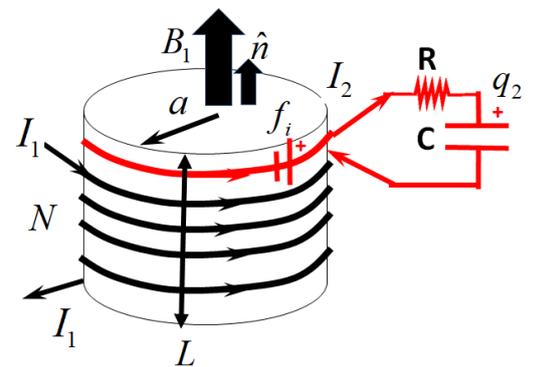


4. Il vettore induzione magnetica generato all'interno del solenoide percorso dalla corrente I_1 ha intensità uniforme pari a

$$B_1 = \mu_o \mu_r \frac{N}{L} I_1 = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L} \left(1 - \frac{t}{T_1}\right).$$

Per il calcolo del flusso concatenato viene scelto il verso di percorrenza nella spira in modo che la normale alla spira \hat{n} abbia lo stesso verso di \vec{B}_1 . Il flusso concatenato diviene quindi:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS = \int B_1 dS = B_1 \cdot S_{ext} = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L} \left(1 - \frac{t}{T_1}\right) \pi a^2$$



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola

la **forza elettromotrice indotta nella spira** costante $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot T_1} \pi a^2 = \mathbf{63.2 \text{ mV}}$

causando nel circuito RC la **corrente indotta** $I_2(t) = \frac{f_i}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot R \cdot T_1} \pi a^2 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

con valore iniziale della corrente indotta $I_2(0) = \frac{f_i}{R} = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot R \cdot T_1} \pi a^2 = \mathbf{3.16 \text{ mA}}$.

La **carica elettrica nel condensatore** si accumula con legge $q_2(t) = f_i C \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$

Raggiungendo il valore limite asintotico $q_2(\infty) = f_i C = \frac{\mu_o \mu_r N I_o}{L \cdot T_1} \pi a^2 C = \mathbf{6.32 \mu C}$.