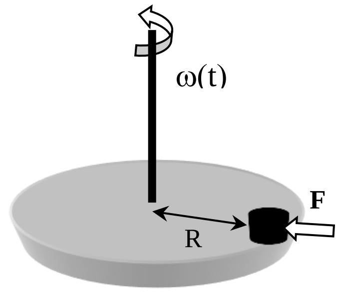
j

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

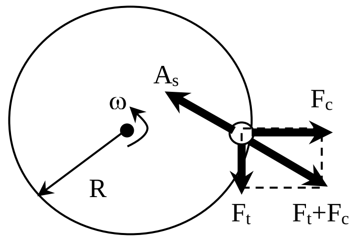
A.A. 2022-2023

Ingegneria Gestionale (M-Z)

Soluzioni del II Appello del 18 Luglio 2023



1. Testo. Un blocco di massa m=50 g è collocato su un disco rotante ad una distanza R= 1 m dall'asse. I coefficienti di attrito tra il blocco ed il disco sottostante sono 0.2 (statico) e 0.1 (dinamico). Il disco, inizialmente fermo, ruota con una accelerazione angolare costante α=0.1 rad/s^2. La forza centrifuga cui è sottoposto il blocco viene parzialmente contrastata da una forza radiale costante di F=0.02 N diretta verso l'interno e applicata solo dopo t_o=7 secondi dall'inizio del moto di rotazione. In queste condizioni determinare in quale istante il blocco comincia a slittare sul disco ed il corrispondente valore della velocità angolare in quell'istante. Calcolare di quanto l'applicazione della forza F abbia consentito di ritardare l'inizio dello slittamento.



1. Soluzione. Il blocco rimane fermo sul disco sin quando la risultante delle forze apparenti, centrifuga $F_c = m\omega^2 R$ e tangenziale $F_t = m\alpha R$ (ortogonali fra loro) vengono controbilanciate dall'attrito statico A_s.

Nel periodo da t=0 a t=t_o il blocco, soggetto alle varie forze, rimane in equilibrio $|\boldsymbol{F_c} + \boldsymbol{F_t}| = \sqrt{(m\omega(t)^2 R)^2 + (m\alpha R)^2} = A_s \leq A_{max} = \mu_s mg$

da cui $\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \cdot R \leq \mu_s g$.

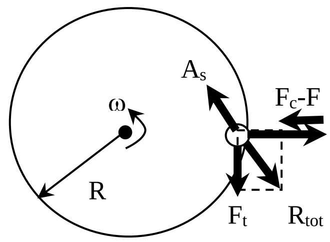
L'equilibrio in tutto il periodo è garantito se è soddisfatta la condizione

nel caso peggiore $\omega = \alpha t_o$

dove $\mu_s = 0.2 \geq \sqrt{\alpha^4 t_o^4 + \alpha^2} \cdot \frac{R}{g} = \mathbf{0.051}$

Successivamente compare anche la forza F diretta nel verso opposto della forza centrifuga. All'equilibrio la risultante totale deve essere controbilanciata dall'attrito

$$|\boldsymbol{F_c} + \boldsymbol{F_t} + \boldsymbol{F}| = \sqrt{(m\omega(t)^2 R - F)^2 + (m\alpha R)^2} = A_s \leq A_{max} = \mu_s mg$$



da cui $\sqrt{(m\alpha^2 t^2 R - F)^2 + (m\alpha R)^2} \leq \mu_s mg$

Quadrando e dopo qualche semplice passaggio esplicitando il tempo

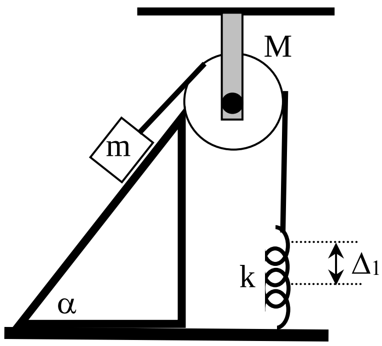
$(m\alpha^2 t^2 R - F)^2 \leq m^2[(\mu_s g)^2 - (\alpha R)^2]$ da cui

$m\alpha^2 t^2 R \leq m\sqrt{(\mu_s g)^2 - (\alpha R)^2}$+F da cui il distacco avviene $t_1 = \sqrt{\frac{m\sqrt{(\mu_s g)^2 - (\alpha R)^2} + F}{m\alpha^2 R}}$ **=15.3 s**

In assenza della forza F viceversa il distacco avviene prima al tempo $t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu_s g)^2 - (\alpha R)^2}}{\alpha^2 R}}$ **=14 s**

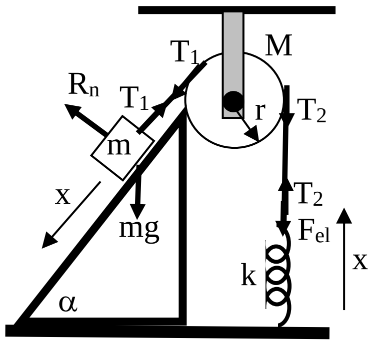
La presenza di F quindi ritarda il distacco di $\Delta t = t_1 - t_2$=**1.36 s**

2. **Testo.** Una fune inestensibile di massa trascurabile è fissata ad una carrucola di massa M=2kg libera di ruotare intono ad un asse orizzontale per il suo centro. Agli estremi della fune sono posizionate una molla di costante elastica k=100 N/m collegata a sua volta al pavimento, ed un blocco di massa m=3kg libero di muoversi lungo un piano liscio inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale. Il blocco si trova inizialmente in equilibrio. In queste condizioni determinare l'allungamento della molla ΔL_1 rispetto alla sua lunghezza a riposo. Successivamente il blocco viene tirato verso il basso producendo un ulteriore allungamento della molla ΔL_2=3 cm che si aggiunge all'allungamento statico iniziale. Al successivo rilascio del blocco si instaurano delle oscillazioni. Determinarne il periodo e calcolare i valori minimi e massimi delle tensioni delle funi.



2. Soluzione.

Il moto del macchinario è ben descritto dal sistema di equazioni:



a) blocco m lungo asse x $\boldsymbol{mgsin\alpha - T_1 = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}}$

b) sulla molla $T_2 - F_{el} = 0$ ossia $\boldsymbol{T_2 - kx = 0}$

c) sulla puleggia (equazione dei momenti)

$T_1R - T_2R = I\,\frac{d\omega}{dt}$ ossia $\boldsymbol{T_1 - T_2 = \frac{I}{r^2}a_x = \frac{M}{2}\frac{d^2x}{dt^2}}$

sommando le 3 equazioni a)+b)+c) si ottiene $\boldsymbol{mgsin\alpha - kx = \left(m + \frac{M}{2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}}$

che dà luogo all'equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m+M/2}\right)x = \left(\frac{m}{m+M/2}\right)gsin\alpha$ (1)

con **allungamento statico** $\Delta L_1 = \frac{mgsin\alpha}{k}$ **=14.7 cm**

Quando la molla è ulteriormente allungata per una lunghezza totale $\Delta L_1 + \Delta L_2$
e successivamente rilasciata si instaurano le oscillazioni previste dalla soluzione della Eq.(1)

$x(t) = \Delta L_1 + \Delta L_2\,cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ con un **periodo di oscillazione** $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M/2}{k}}}$ **=1.26 s**

La **tensione del tratto di fune di destra diviene:** $T_2(t) = kx = k\left[\Delta L_1 + \Delta L_2\,cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right]$
con valore massimo $T_{2,max} = k(\Delta L_1 + \Delta L_2)$ **=17.7 N**
e valore minimo $T_{2,min} = k(\Delta L_1 - \Delta L_2)$ **=11.7 N**

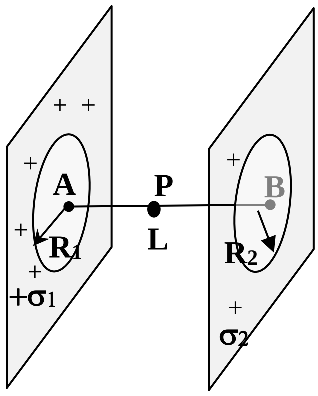
La **tensione del tratto di fune di sinistra diviene:**

$$T_1(t) = m(gsin\alpha - a) = m\left(gsin\alpha + \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta L_2 cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)$$

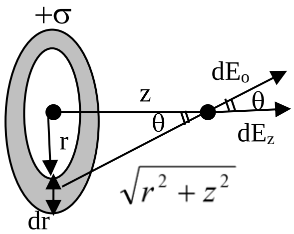
con valore massimo $T_{1,max} = m\left(gsin\alpha + \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta L_2\right)$ **=17 N**

con valore minimo $T_{1,min} = m\left(gsin\alpha - \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta L_2\right)$ **=12.4 N**

3. Testo. In uno strato piano indefinito, caricato con densità superficiale uniforme σ_1= 100μC/m^2, è praticato un foro circolare di centro A e di raggio R_1=5 cm. Analogamente anche in un secondo strato piano parallelo, caricato con densità superficiale uniforme σ_2=200μC/m^2 è praticato un foro circolare di centro B e di raggio R_2 incognito. I due strati piani sono paralleli, distanti L=20 cm e posizionati in modo che i centri dei fori si trovino sul segmento AB normale ai piani, come riportato in figura. Sapendo che il campo elettrico si annulla nel punto di mezzo P del segmento AB, determinare il valore del raggio R_2



3. Soluzione. Campo elettrico prodotto dal singolo strato piano forato.
La carica infinitesima presente in un singolo anello di raggio r, è $dq = \sigma(2\pi r dr)$



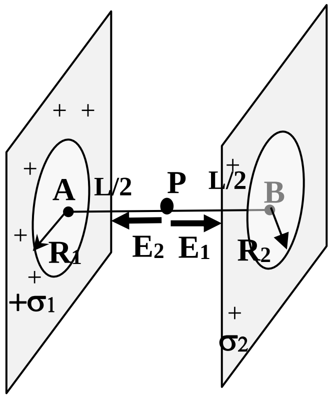
Tale carica produce un campo elettrico assiale in P
$dE_z = dE_o \cos\theta = \frac{dq \cos\theta}{4\pi\varepsilon_o (r^2 + z^2)}$ e quindi $dE_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \frac{zrdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$.
Il campo elettrico complessivo del singolo strato piano forato si ottiene integrando tutti i contributi con r≥R

$$E_z = \int_R^{\infty} \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \frac{zrdr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti per calcolare il campo elettrico complessivo nel punto P

$$E_{tot} = E_P^{(1)} - E_P^{(2)} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R_1^2}} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R_2^2}}$$

L'annullamento del campo elettrico si ha quando:



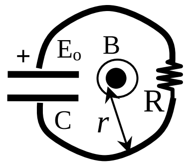
$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{(L/2)^2 + R_1^2}} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{(L/2)^2 + R_2^2}}$$

che quadrando ed invertendo

$$\frac{(L/2)^2 + R_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{(L/2)^2 + R_1^2}{\sigma_1^2}$$

da cui esplicitando si ottiene l'incognita $R_2 = \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}[(L/2)^2 + R_1^2] - (L/2)^2}$= **20 cm**

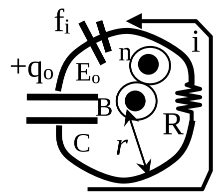
4. Testo. Un circuito elettrico di forma circolare di raggio r=30 cm è chiuso nell'istante t=0 su una resistenza R=2 Ω , ed un condensatore di capacità C=100μF con energia iniziale E_o=5 mJ e segno della carica come riportato in figura. Nella regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale di induzione $B(t)=B_o(1-t/\tau_1)$ con B_o=0.1 T. Determinare il valore della costante di tempo τ_1 affinché l'energia sul condensatore rimanga invariata nel tempo. Determinare in questo caso il valore della corrente elettrica dopo 1 e 10 secondi.



4 Soluzione. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}$,

si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:

$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS = BS = B_o\left(1 - \frac{t}{\tau_1}\right) \cdot (\pi r^2)$$



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = \frac{B_o \cdot \pi \cdot r^2}{\tau_1}$ (la corrente tende quindi a circolare nel senso in figura)

Oltre alla forza elettromotrice indotta è anche presente un condensatore con una carica iniziale q_o.

L'equazione della maglia diviene quindi

$\boldsymbol{i(t)R + \frac{q(t)}{C}} = f_i = \frac{B_o \pi r^2}{\tau_1}$ da cui $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{f_i}{R}$

con soluzione $q(t) = f_i C + A\, exp(-t/RC)$

La carica iniziale sul condensatore si ottiene dall'energia iniziale dalla formula

$E_o = \frac{1}{2}\frac{q_o^2}{C}$ da cui $q_o = \sqrt{2E_oC}$ =**1mC**

Con questo dato ed imponendo $q(t=0)=q_o$ si ottiene la legge di evoluzione della carica

$$\boldsymbol{q(t) = f_i C + (q_o - f_i C)\, exp(-t/RC)}$$

Se poi l'energia e quindi la carica sul condensatore deve rimanere costante nel tempo questo implica che $q(t)=q_o$ ossia $\boldsymbol{q_o = f_i C}$ da cui $\boldsymbol{f_i = q_o/C = 10\ V}$

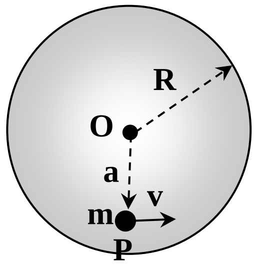
e quindi $\sqrt{2E_oC} = \frac{B_o \cdot \pi \cdot r^2}{\tau_1} C$

da cui la costante di tempo vale $\tau_1 = \frac{B_o \cdot \pi \cdot r^2}{\sqrt{2E_oC}} C = \frac{B_o \cdot \pi \cdot r^2}{\sqrt{2E_o}} \sqrt{C}$ **= 2.83 ms**

La corrente in queste condizioni di carica invariata è chiaramente sempre nulla **i(t)=0**

Integrazione di due esercizi solo ai fini del Secondo esonero

2. Testo. All'interno di una sfera di centro in O e di raggio R=12 cm è distribuita una carica Q=100μC con densità volumetrica non uniforme di legge $\rho(r) = kr^2$ (r è la distanza di un punto generico dal centro O). Una carica puntiforme negativa di carica q= -3μC, di massa m=5g viene lanciata dal punto P (OP=a=10 cm) alla velocità v in modo da poter descrivere un orbita circolare intorno al centro O. Calcolare la velocità che occorre imprimere inizialmente v.



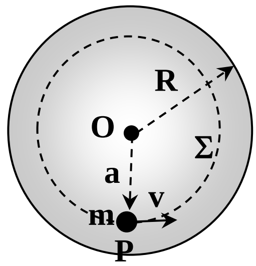
2. Soluzione. Calcolo preliminare della costante k

Integrando la densità di carica nella sfera

$Q = \int_{sfera} \rho d\tau = \int_0^R (kr^2)(4\pi r^2 dr) = \frac{4}{5} k\pi R^5 \Rightarrow k = \frac{5}{4}\frac{Q}{\pi R^5}$ = **1.6 C/m^5**

Calcolo del campo elettrico interno alla sfera

Applicando la legge di Gauss ad una sfera passante per P con centro O



$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_o) = 4\pi a^2 E_o(a) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{\int \rho d\tau}{\varepsilon_o} = \frac{\int_o^a (kr^2)(4\pi r^2 dr)}{\varepsilon_o} = \frac{4}{5}\frac{\pi k a^5}{\varepsilon_o}$$

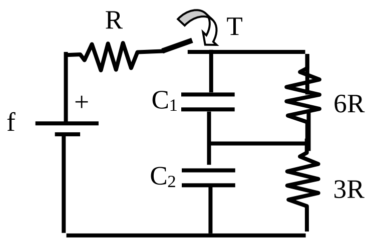
da cui $E_o(a) = \frac{ka^3}{5\varepsilon_o} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^3}{R^5}$ =**3.6 ×10^7 V/m**

Calcolo della velocità orbitale

la forza di attrazione elettrica è causa della traiettoria circolare del moto orbitale della carica

$F_e = qE_o = ma_n$ quindi $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o}\frac{a^3}{R^5} = m\frac{v^2}{a}$ da cui $\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m}\frac{a^4}{R^5}}$ = **46.6 m/s**

3. Testo. I due condensatori indicati in figura hanno carica inizialmente nulla prima delle chiusura dell'interruttore T. Determinare la carica che si accumula singolarmente su ciascun condensatore (C_1 e C_2) dopo lungo tempo dalla chiusura di T [f=10V, R=1kΩ, C_1=2μF, C_2=5μF]



3. Soluzione.

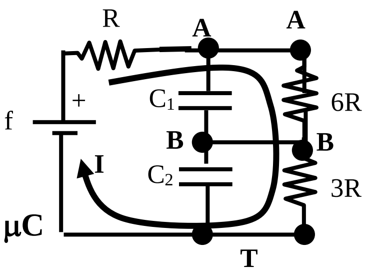
Dopo lungo tempo dalla chiusura dell'interruttore T il processo di carica può considerarsi terminato e la corrente di carica nei condensatori diviene irrilevante. Pertanto la corrente circola esclusivamente nella maglia resistiva esterna.

$$I = \frac{f}{R + 6R + 3R} = \frac{f}{10R}$$

Per la legge di Ohm è possibile calcolare le cadute di potenziale ai capi delle resistenze collegate ai condensatori che coincidono con le differenze di potenziale ai capi dei condensatori

ΔV$_{C1}$ $=V_A - V_B = 6R \cdot I = \frac{3}{5}f$

ΔV$_{C1}$ $=V_B - V_T = 3R \cdot I = \frac{3}{10}f$



di conseguenza si trovano le cariche sui condensatori

$\boldsymbol{Q_1 = \Delta V_{C1} \cdot C_1 = \frac{3}{5} f C_1}$**=12 μC** e $Q_2 = \Delta V_{C2} \cdot C_2 = \frac{3}{10} f C_2$ **=15 μC**