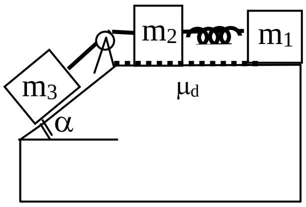
FISICA

A.A. 2020-2021
Ingegneria Gestionale
2° appello del 9 Luglio 2021
Esame completo - Soluzioni



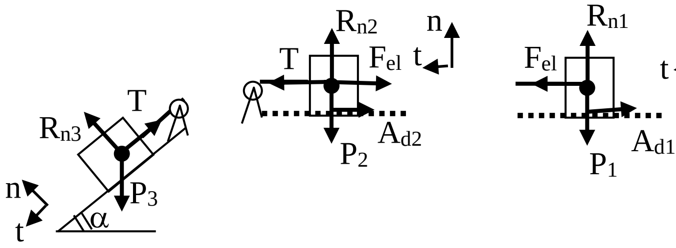
1. Testo. Tre blocchi di massa $m_1=m_3=1.4$ kg ed $m_2=2.8$ kg sono disposti come in figura. Il tratto orizzontale è scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d=0.157$. I blocchi di massa m_1 ed m_2 sono collegati tramite una molla di costante elastica k=20 N/m, mentre i blocchi di massa m_2 e m_3 sono collegati da una fune inestensibile di massa trascurabile. Il piano inclinato di $\alpha=45°$ rispetto all'orizzontale è invece liscio e quindi privo di attrito. Sapendo che il sistema è in moto, che l'allungamento della molla è costante, e che la fune rimane tesa, si chiede di determinare le seguenti incognite: a) il modulo dell'accelerazione del sistema; b) l'allungamento costante della molla; c) la tensione della fune; d) sapendo che al tempo t=0 il sistema si muove alla velocità $v_o=10$ cm/s nel verso dell'accelerazione si determini il lavoro compiuto dalla forza di attrito nel periodo $\Delta t=2$s in cui i blocchi m_1 e m_2 scorrono sul piano orizzontale.

1. Soluzione. Assumendo che il sistema sia in moto a causa dello scivolamento a valle del blocco n.3, ai fini del calcolo della accelerazione del sistema è opportuno studiare le forze per ciascun blocco scomposte lungo l'asse del moto t, e quello normale n:

massa m_3 ; $\begin{cases} t) & P_3 \sin\alpha - T = m_3 a \\ n) & R_{n3} = P_3 \cos\alpha \end{cases}$

massa m_2 ; $\begin{cases} t) & T - F_{el} - A_{d2} = m_2 a \\ n) & R_{n2} = P_2 \end{cases}$

massa m_1 ; $\begin{cases} t) & F_{el} - A_{d1} = m_1 a \\ n) & R_{n1} = P_1 \end{cases}$



ove T è la tensione della fune, $F_{el}=k\Delta l$ è la forza elastica sviluppata dalla molla, A_{d1}, A_{d2} le forze di attrito per i blocchi n.1 e n.2, $P_1=m_1g$, $P_2=m_2g$ e $P_3=m_3g$ le forze peso per i blocchi n.1, n.2 e n.3.

Sommando tutte le equazioni lungo l'asse del moto si ottiene

$P_3 \sin\alpha - A_{dl} - A_{d2} = (m_1 + m_2 + m_3)a$ da cui

l'**accelerazione** $a = g\dfrac{m_3 \sin\alpha - \mu_d(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3} =$ **0.578 m/s²**

Dalla terza equazione si ricava **la forza elastica** $F_{el} = m_1 a + A_{d1} = m_1 g\dfrac{m_3(\sin\alpha + \mu_d)}{m_1+m_2+m_3}$ =**2.96 N**

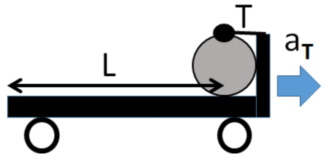
da cui **l'allungamento della molla** $\Delta l = \dfrac{F_{el}}{k} = \dfrac{m_1 g}{k}\dfrac{m_3(\sin\alpha+\mu_d)}{m_1+m_2+m_3} =$ **14.8 cm**

Dalla prima si ricava la **tensione della fune** $T = P_3 \sin\alpha - m_3 a = m_3 g\dfrac{(\sin\alpha+\mu_d)(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3} =$ **8.9 N**

Nel periodo $\Delta t=2$s i blocchi n.1 e n.2 si muovono di moto rettilineo uniforme, percorrendo lo **spazio** $\Delta s=v_o\Delta t+a\Delta t^2/2=$**1.357 m**

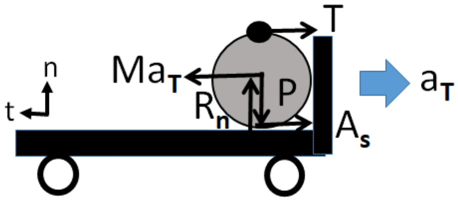
Il **lavoro compiuto dalle forze di attrito** è negativo essendo l'attrito opposto al moto e vale $L_A = -(A_{d1}+A_{d2})\Delta s = -\mu_d(m_1+m_2)g\Delta s =$ **- 8.77 J**

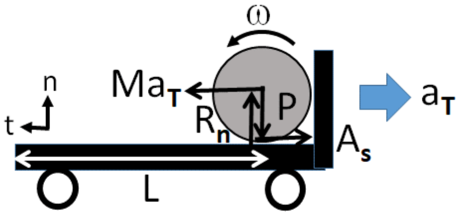
2. Testo. Un treno si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione a_T. Un vagone merci di lunghezza L=9m trasporta un tronco di albero approssimabile ad un cilindro omogeneo di massa e raggio incogniti. Il cilindro è legato alla sommità con una fune orizzontale che esercita una tensione T come mostrato in figura. Il piano del vagone ha un coefficiente di attrito statico μ_s=0.4.



1) Trovare il valore massimo di a_T affinché il tronco non inizi a scivolare sul piano del vagone.
2) Assumendo che a_T=3m/s^2, si supponga che si rompa la fune e che il tronco cominci a rotolare sul piano del vagone. Si calcoli la velocità finale (rispetto al vagone) con cui il tronco cade dal vagone.

2. Soluzione. Equazioni cardinali per la sfera
Le forze agenti sul tronco sono:
la forza peso **M*g*** applicata nel baricentro del tronco;
la forza apparente **Ma_T** applicata nel baricentro del tronco
la tensione **T** applicata nel punto alto T lungo l'asse del moto
la reazione normale **R_n** applicata sul punto di contatto e lungo n ;
la forza di attrito statico **A_s** applicata sul punto di contatto e lungo t.





1) **In condizioni statiche**

La **1ª equazione cardinale** proiettata lungo gli assi *n,t*

$$\begin{matrix} \hat{t} \\ \hat{n} \end{matrix} \begin{cases} Ma_T - A_s - T = 0 \\ R_n - Mg = 0 \end{cases}$$

La **2ª equazione cardinale** calcolata rispetto ad un asse per il baricentro
(Hanno momento non nullo solo l'attrito e la tensione della fune. Invece la forza peso e la forza apparente hanno braccio nullo, e la linea di azione della reazione normale passa per il baricentro)

$A_s r - Tr = 0$ dove r è il raggio del cilindro da cui $A_s = T$

Combinando con la 1° equazione cardinale si ottiene $A_s = T = \dfrac{Ma_T}{2} \le A_{max} = \mu_s R_n = \mu_s Mg$

da cui l'accelerazione massima consentita vale $a_T \le 2\mu_s g =$ **7.85 m/s²**

In condizioni dinamiche quando la fune si rompe

La **1ª equazione cardinale** proiettata lungo gli assi *n,t*

$$\begin{matrix} \hat{t} \\ \hat{n} \end{matrix} \begin{cases} Ma_T - A_s = Ma_C \\ R_n - Mg = 0 \end{cases}$$

La **2ª equazione cardinale** calcolata rispetto all'asse per il baricentro

$A_s r = I_C \dfrac{d\omega}{dt} = I_C \dfrac{a_C}{r}$ dove è stata imposta la condizione di rotolamento $v_C=\omega \cdot r$

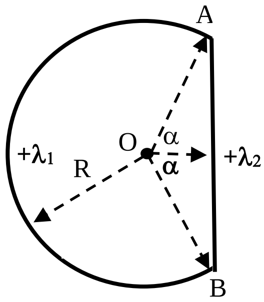
da cui si trova l'espressione dell'attrito statico $A_s = \dfrac{I_C}{r^2} a_C$ che inserita nella 1ª cardinale

permette di trovare **l'accelerazione del centro di massa** $a_C = \dfrac{a_T}{1+\dfrac{I_C}{Mr^2}} = \dfrac{a_T}{1+1/2} = \dfrac{2}{3} a_T$ =**2 m/s²**

Il moto del centro di massa è uniformemente accelerato. Il **tempo di percorrenza** fino al raggiungimento della fine del vagone L=9m vale $t=\sqrt{\dfrac{2L}{a_C}}=$ **3 s**

In quell'istante la **velocità del centro di massa** raggiunge il valore $v_C=\sqrt{2a_C L}=2\sqrt{\dfrac{a_T L}{3}}$ **= 6 m/s**

3. Testo. Una carica positiva è distribuita con densità lineica uniforme λ_1=10μC/m lungo un ampio arco di una circonferenza di raggio R=10 cm e di centro O. Una seconda carica positiva è invece distribuita uniformemente con densità λ_2 sulla corda AB che si raccorda alla circonferenza in modo da formare un angolo al centro di valore 2α=60° come riportato in figura. Determinare per quale valore della densità λ_2 il campo elettrico nel centro O si annulla.



3. Soluzione. Campo elettrico e potenziale generato dalla semicirconferenza

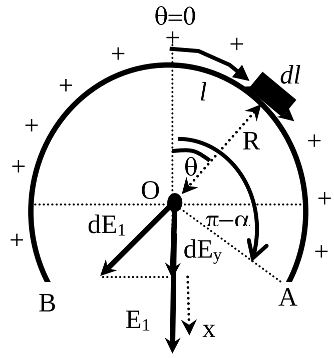
La carica infinitesima *dq* disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima *dl*, genera nel centro *O* (alla distanza *R*) un contributo di campo elettrico $dE_1=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2}=\dfrac{\lambda_1 d\ell}{4\pi\varepsilon_o R^2}=\dfrac{\lambda_1 d\theta}{4\pi\varepsilon_o R}$ diretto come in figura

La carica *dq* sull'arco si scrive come $dq=\lambda_1 dl=\lambda_1 R\, d\theta$.

Per ragioni di simmetria E_1 è tutto diretto lungo l'asse x,

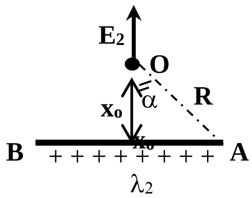
tutti i contributi efficaci vanno proiettati lungo x : $dE_x=dE_1\cos\theta$

il **campo elettrico complessivo** si può calcolare raddoppiando i contributi ed integrandoli lungo metà dell'arco di circonferenza da θ=0 fino a θ=π−α



$$E_1=\int dE_x=2\int_0^{\pi-\alpha}\frac{\lambda_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R}d\theta=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi-\alpha}=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}\sin\alpha$$

Campo elettrico generato dalla corda AB



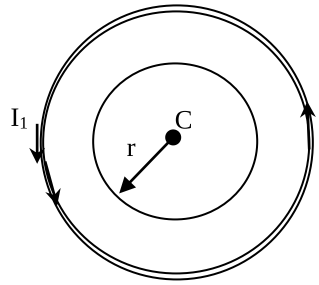
Sfruttando le simmetrie si può dimostrare che il campo elettrico nel centro O è anch'esso diretto lungo l'asse delle x ma in verso opposto e vale

$$E_2=\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o x_o}\sin\alpha=\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}\tan\alpha$$

Il campo elettrico totale è dato dalla differenza dei campi elettrici generati dalle due distribuzioni. Esso deve annullarsi nel centro O

$$E_{tot}=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}\sin\alpha-\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}\tan\alpha=0$$

da cui si ricava la **densità lineare di carica** $\lambda_2=\lambda_1\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\lambda_1\cos\alpha$ **=8.66 μC/m**



4. Testo. Un solenoide di lunghezza L, costituito da N spire, viene percorso da una corrente variabile nel tempo con legge lineare $I_1(t)=m*t$. Una spira metallica circolare di raggio r, costituita da un filo di rame di resistività elettrica $\rho=1.68\ 10^{-8}\ \Omega$m e sezione S=10mm^2 è interna e coassiale al solenoide. Trascurando i fenomeni di autoinduzione, calcolare in quale istante di tempo il campo magnetico nel punto C si annulla.

4. Soluzione. Il **vettore induzione magnetica** in tutti i punti interni del solenoide vale

$B_{o,1}(t)=\mu_o\left(\frac{N}{L}\right)I_1(t)$ (verso uscente)

Il **flusso concatenato** con la spira circolare vale $\Phi_c(t)=\iint \vec{B}_{o,1}\cdot\hat{n}dS=\mu_o\left(\frac{N}{L}\right)\pi r^2 I_1(t)$

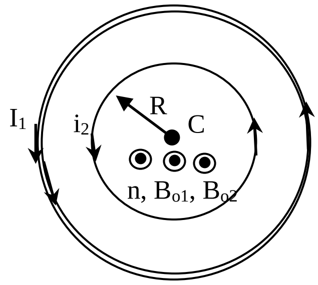
Per Faraday-Neumann-Lenz la **f.e.m. indotta** nella spira è $f_i=-\frac{d\Phi_c}{dt}=-\mu_o\left(\frac{N}{L}\right)\pi r^2\frac{dI_1}{dt}$

da cui l'**intensità della corrente indotta nella spira** $I_2=\frac{f_i}{R}=-\frac{\mu_o\pi r^2 N}{L\rho\left(\frac{2\pi r}{S}\right)}\frac{dI_1}{dt}=-\frac{\mu_o rNSm}{2L\rho}$

(*contrario al verso stabilito convenzionalmente in figura*)

che produce **un campo magnetico indotto** al centro della spira $B_{o2}=\frac{\mu_o I_2}{2r}=-\frac{\mu_o^2 NSm}{4L\rho}$

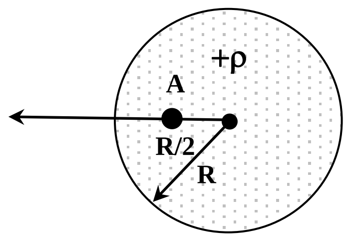
(*contrario al verso stabilito convenzionalmente in figura,*
quindi opposto rispetto al campo inducente B_{o1})



Il campo magnetico in C si annulla quando i due campi si equivalgono $\left|\frac{B_{o2}}{B_{o1}}\right|=\frac{\frac{\mu_o^2 NSm}{4L\rho}}{\frac{\mu_o N}{L}mt}=\left(\frac{\mu_o S}{4\rho}\right)\frac{1}{t}=1$

da cui si ricava l'**istante di tempo** $t=\frac{\mu_o S}{4\rho}=$ **0.19 ms**

Integrazione di due esercizi solo ai fini del Secondo esonero



2. Testo. Data una sfera di raggio R=50 cm avente densità di carica volumetrica dipendente dal raggio $\rho=kr^2$. Data una carica q=10μC, di massa m=100g posizionata nel punto interno A alla distanza R/2 dal centro della sfera. Assumendo che la carica q sia inizialmente ferma, determinarne, durante il suo moto di allontanamento, la velocità raggiunta quando esce dalla sfera [k=10μC/m^5].

2. Soluzione. Viene applicata la conser2vazione dell'energia meccanica nei punti A, B da cui $qV_A+0=qV_B+K_B$ (ove si è imposta l'energia cinetica iniziale nulla K_A=0) . Da questa condizione si ottiene l'espressione della velocità nel punto B; $w_B=\sqrt{2q(V_A-V_B)/m}$

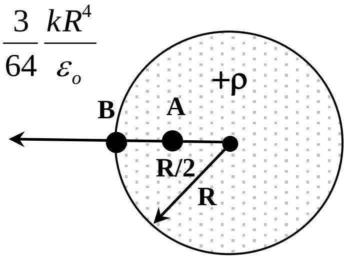
Calcolo del potenziale V nel punto di partenza A e di arrivo B
Applicando la legge di Gauss per calcolare il flusso uscente da una sfera di raggio r<R si ottiene

$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}_{\text{int}} \cdot \hat{n} dS = \left(4\pi r^2\right) E_{\text{int}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o} = \frac{\int_0^r \rho\left(4\pi r^2\right)dr}{\varepsilon_o} = \frac{4\pi k \int_0^r r^4 dr}{\varepsilon_o} = \frac{4\pi k r^5}{5\varepsilon_o} \text{ da cui}$$

il campo **elettrico interno** si calcola come $E_{\text{int}} = \frac{k}{5\varepsilon_o} r^3$

La differenza di potenziale fra i punti A e B si calcola come

$$V_A - V_B = \int_{R/2}^{R} E_{\text{int}} dr = \frac{k}{5\varepsilon_o} \int_{R/2}^{R} r^3 dr = \frac{k}{5\varepsilon_o}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R/2}^{R} = \frac{k}{20\varepsilon_o}\left[R^4 - \frac{R^4}{16}\right] = \frac{3}{64}\frac{kR^4}{\varepsilon_o}$$



da cui la velocità raggiunta in B vale

$w_B = \sqrt{3qkR^4 / 32m\varepsilon_o}$ **= 0.81 m/s**

3. Testo. Un generatore di corrente continua fornisce una corrente I=200 A ed una differenza di potenziale ΔV=1100 V. L'energia elettrica viene inviata tramite una linea di lunghezza L=30 km costituita da due fili cilindrici di collegamento di resistività $\rho = 1.65 \cdot 10^{-8}$ Ω m e di stessa geometria. Determinare il raggio della sezione circolare del filo affinchè la potenza trasferita al carico dalla linea sia η=90% di quella erogata.

3. Soluzione. L'espressione della resistenza elettrica della coppia di fili vale: $R_{fili} = 2\left(\rho \frac{L}{S}\right) = \frac{8\rho L}{\pi d^2}$.

Su tale resistenza per effetto Joule viene dissipata la potenza $P_R = I^2 R_{fili}$ a fronte della potenza erogata dalla sorgente $P_g = I\Delta V$.

Se il rendimento η indica la frazione di energia trasferita, il suo complemento (1- η) rappresenta la frazione di energia dissipata:

$$1 - \eta = \frac{P_R}{P_g} = \frac{I^2 R_{fili}}{I\Delta V} = \frac{IR_{fili}}{\Delta V} = \frac{8I\rho L}{\Delta V \pi d^2}$$

in cui può essere esplicitato il diametro del filo $d = \sqrt{\frac{8I\rho L}{\Delta V \pi (1-\eta)}}$ = **4.8 cm**

(L'ultima formula chiarisce come a parità di energia erogata, per minimizzare le perdite sia conveniente aumentare il voltaggio della linea ΔV, diminuendo l'amperaggio I, così da poter ridurre lo spessore dei fili)