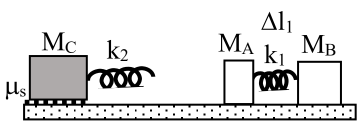
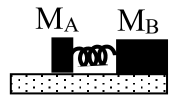
FISICA

A.A. 2018-2019
Ingegneria Gestionale
2° appello del 22 Luglio 2019
Soluzione Esame completo



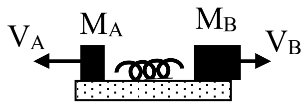
1. **Testo.** Due blocchi di masse M_A=1kg ed M_B=2kg si trovano su un piano orizzontale liscio. I due blocchi sono collegati fra loro contemporaneamente da una molla di costante elastica k_1=20N/m e da una fune in modo che la molla risulti compressa di ΔL_1 e la fune tesa. Quando la fune viene bruciata la molla si estende repentinamente e lancia i due blocchi in direzioni opposte lungo il piano privo di attrito. Successivamente la massa M_A va a comprimere una seconda molla di costante elastica k_2=30N/m collegata ad una massa M_C=1kg inizialmente ferma. Assumendo che esista attrito solo tra M_C ed il piano (μ_s=0.15), determinare il massimo valore della compressione iniziale ΔL_1 in conseguenza del quale la massa M_C riesce a rimanere in quiete. Determinare anche il corrispondente valore della massima compressione ΔL_2 di k_2.

1. Soluzione. Calcolo della velocità iniziale delle masse M_A ed M_B



Conservazione dell'energia meccanica $\frac{1}{2}k_1\Delta L_1^2 = \frac{1}{2}M_A V_A^2 + \frac{1}{2}M_B V_B^2$

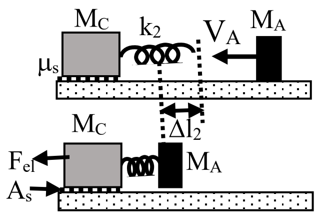
(l'energia potenziale elastica si trasforma in energia cinetica)



Conservazione della quantità di moto $0 = M_A V_A + M_B V_B$

(lungo l'asse del moto agisce solo la forza elastica che è una forza interna)

da cui mettendo a sistema $\begin{cases} |V_A| = \Delta L_1 \sqrt{\dfrac{M_B k_1}{M_A(M_A+M_B)}} \\ |V_B| = \Delta L_1 \sqrt{\dfrac{M_A k_1}{M_B(M_A+M_B)}} \end{cases}$



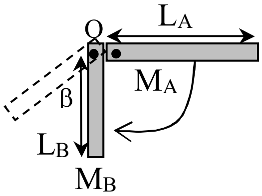
Calcolo della massima compressione della molla di costante k_2

Applicando la conservazione dell'energia meccanica sui due blocchi M_A ed M_C durante la compressione $\frac{1}{2}k_2\Delta L_2^2 = \frac{1}{2}M_A V_A^2$ da cui $\Delta L_2 = |V_A|\sqrt{\frac{M_A}{k_2}} = \Delta L_1\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\frac{M_B}{M_A+M_B}}$ che si scrive in termini della compressione iniziale incognita $\Delta L_1 = \Delta L_2\sqrt{\frac{k_2}{k_1}\left(1+\frac{M_A}{M_B}\right)}$

Affinché il blocco M_C rimanga fermo la forza di attrito con il piano deve compensare la forza elastica $A_s = F_{el} = k_2\Delta L_2 \le A_{max} = \mu_s R_n = \mu_s M_C g$ da cui la **massima compressione della seconda molla** $\Delta L_2 \le \frac{\mu_s M_C g}{k_2}$ **= 4.9 cm**

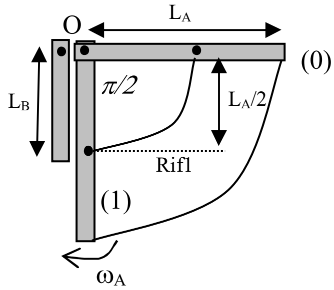
che combinata con la espressione precedente permette di calcolare la **massima compressione iniziale della prima molla** $\Delta L_1 = \Delta L_2\sqrt{\frac{k_2}{k_1}\left(1+\frac{M_A}{M_B}\right)} = \frac{\mu_s M_C g}{\sqrt{k_1 \cdot k_2}}\sqrt{1+\frac{M_A}{M_B}}$ **=7.4 cm**

2. Testo. Due pendoli composti costituiti da due barre omogenee A e B di masse M_A=2kg, M_B=8kg e di lunghezze L_A=40cm, L_B=20cm sono liberi di ruotare in un piano verticale avendo un estremo della barra incardinato. Il pendolo A è inizialmente tenuto fermo in una posizione orizzontale, mentre il pendolo B è inizialmente fermo nella posizione di equilibrio lungo la verticale. Quando la barra A viene lasciata cadere essa ruotando viene ad urtare elasticamente la barra B. Avendo le due barre medesimo momento di inerzia I_A=I_B dopo l'urto la barra A si ferma mentre la barra B prende ad oscillare. Determinare la velocità angolare della barra B dopo l'urto e l'angolo di massima oscillazione β.



2. Soluzione.

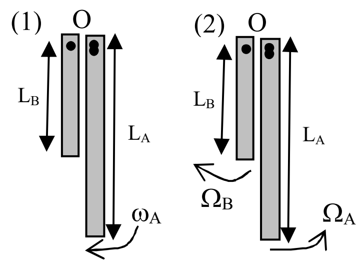
La prima barra, inizialmente ferma nella posizione orizzontale, acquista velocità angolare durante la caduta. Prima dell'urto con la seconda barra la velocità angolare ω_A si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica. L'energia potenziale iniziale $U_o=M_A g L_A/2$ (calcolata nel centro di massa della barra con riferimento alla quota Rif1) si trasforma integralmente in energia cinetica rotazionale della barra K_1



$U_o = K_1$ quindi $M_A g \frac{L_A}{2} = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2$

da cui la velocità angolare massima $\omega_A = \sqrt{\frac{M_A g L_A}{I_A}} = \sqrt{\frac{3g}{L_A}} =$ **8.57 rad/s**

Nel successivo **urto elastico fra le barre A e B** si conserva il momento della quantità di moto e l'energia (cinetica). Ossia prima dell'urto (1) e dopo l'urto (2) tali quantità non cambiano così da poter impostare il sistema di secondo grado



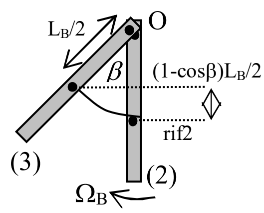
$b_{prima} = b_{dopo}$ da cui $I_A \omega_A = I_A \Omega_A + I_B \Omega_B$

$K_{prima} = K_{dopo}$ da cui $\frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \frac{1}{2} I_A \Omega_A^2 + \frac{1}{2} I_B \Omega_B^2$

Dove Ω_A ed Ω_B sono le velocità angolari dopo l'urto. Risolvendo il sistema con la stessa tecnica utilizzata nell'urto elastico centrale lungo un asse

si ottiene **per A** $\Omega_A = \left(\frac{I_A - I_B}{I_A + I_B} \right) \omega_A = 0$ essendo I_A=I_B *(A si ferma dopo l'urto)*

si ottiene **per B** $\Omega_B = \left(\frac{2 I_A}{I_A + I_B} \right) \omega_A = \omega_A =$ **8.57 rad/s** *(B prende la velocità angolare di A)*



Calcolo del massimo angolo di elevazione di B

La seconda barra subito dopo l'urto (2) non ha energia potenziale (*il suo centro di massa è alla quota minima d riferimento rif2*)

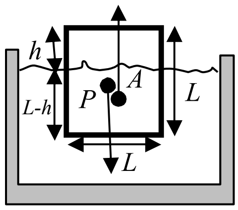
ma ha energia cinetica rotazionale $K_2 = \frac{1}{2} I_B \Omega_B^2 = \frac{1}{2} I_B \omega_A^2$

La barra si eleva e nello stato (3) e l'energia si trasforma totalmente in potenziale $U_3 = M_B g \frac{L_B}{2} (1 - \cos\beta)$. Imponendo la conservazione dell'energia $K_2 = U_3$

si ottiene l'**angolo massimo di oscillazione** $\beta = \arccos\left[1 - \frac{I_B}{M_B L_B} \frac{\omega_A^2}{g} \right] = \arccos\left[1 - \frac{L_B}{L_A} \right] =$ **60°**

3. Testo. Una tazza contiene 100 ml di acqua calda alla temperatura di 40°C. Per abbassare la temperatura rapidamente si inserisce un cubetto di ghiaccio a -10°C che inizialmente affiora rispetto al pelo libero dell'acqua per una quota di 3mm. Al termine il ghiaccio si scoglie ed il sistema raggiunge una comune temperatura t_f. Determinare la temperatura finale t_f [densità dell'acqua δ_A=1000 kg/m^3, densità del ghiaccio δ_G=920 kg/m^3, calore specifico dell'acqua C_a=4186 J/kg °C, calore specifico del ghiaccio C_g=2090 J/kg °C, calore latente di fusione del ghiaccio λ=333 J/kg]

3. Soluzione. Calcolo del volume e della massa iniziale del cubetto



Il cubetto di ghiaccio di lato L galleggia grazie alla compensazione della sua forza peso $P = m_g g = (\delta_G L^3)g$ applicata nel baricentro, e della spinta di archimede applicata nel centro di spinta che agisce sul volume immerso $V_{imm} = (L-h)L^2$ ed è pari al peso (equivalente in acqua) della parte immersa $A = (\delta_A V_{imm})g = [\delta_A (L-h)L]g$

All'equilibrio A=P si ha $(\delta_G L^3)g = [\delta_A (L-h)L^2]g$ da cui semplificando si ricava il **lato del cubetto** $L = h\dfrac{\delta_A}{\delta_A - \delta_G}$=**3.8 cm** e la **massa di ghiaccio** $m_g = \delta_G L^3 =$ **48.5 g**

Determinazione della temperatura di equilibrio.

Applicando le equazioni della calorimetria il cubetto di ghiaccio di massa m_g deve assorbire una quantità di calore Q_g per portarsi dalla temperatura iniziale T_g= -10°C, alla temperatura finale incognita T_f. Tale quantità è composta da tre contributi:

$$Q_g = m_g C_g (0 - T_g) + m_g \lambda + m_g C_a (T_f - 0) = m_g (C_a T_f - C_g T_g + \lambda) > 0 \quad \text{(calore assorbito)}$$

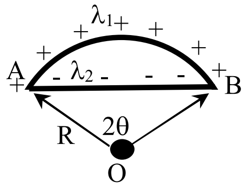
Viceversa l'acqua calda contenuta nella tazza portandosi dalla temperatura iniziale T_a=40°C alla temperatura di equilibrio $T_f<T_a$ deve cedere la seguente quantità di calore

$$Q_a = m_a C_a (T_f - T_a) < 0 \quad \text{(calore ceduto)}$$

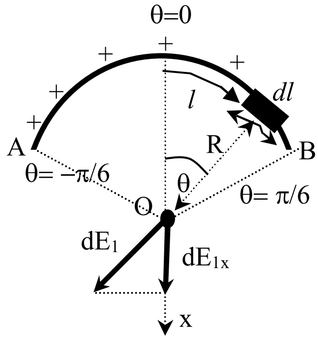
Assumendo che il sistema sia isolato con l'esterno la somma algebrica delle due quantità di calore si annulla (condizione adiabatica $Q_g+Q_a=0$) da cui si può trovare la temperatura di equilibrio

$$T_f = \frac{m_a C_a T_a + m_g C_g T_g - m_g \lambda}{(m_a + m_g)C_a} = = \frac{0.100 \cdot 4186 - 0.0485 \cdot 0.0092 \cdot 10 - 0.0485 \cdot 333}{(0.100 + 0.0485) \cdot 4186} \frac{J}{J/°C} = \mathbf{25.28\ °C}$$

4. Testo. Su un arco AB di una circonferenza di raggio R centrata in O viene posta una distribuzione di carica uniforme λ_1=+50μC/m. Sulla corda AB viene posizionata una distribuzione lineare uniforme di segno opposto λ_2. Calcolare il valore λ_2 che permette di annullare il campo elettrico nel punto O: **Dati:** apertura angolare del settore circolare 2θ=60°



4. Soluzione. Campo elettrico generato da una semicirconferenza



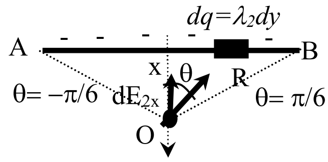
La carica disposta nel tratto dℓ=Rdθ, vale dq=λ_1dℓ =λ_1Rdθ

e genera nel punto *O* un contributo $dE_1 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \dfrac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta$

lungo la direzione in figura. Per ragioni di simmetria il campo elettrico risultante sarà diretto lungo l'asse delle *x* per cui

$$E_1 = \int dE_{1,x} = \int dE_1 \cos\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o R}\int_{-\pi/6}^{+\pi/6}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o R}[\sin\theta]_{-\pi/6}^{+\pi/6} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o R}$$

Campo elettrico generato dal segmento AB



La carica disposta nel tratto rettilineo generico vale dq=$\lambda_2$dy

che genera nel punto *O* un contributo $dE_2 = \dfrac{\lambda_2 dy}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+y^2\right)} = \dfrac{\lambda_2 \dfrac{x}{\cos^2\theta} d\theta}{4\pi\varepsilon_o \dfrac{x^2}{\cos^2\theta}}$

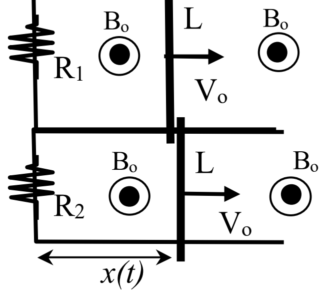
lungo la direzione in figura. Per ragioni di simmetria il campo elettrico risultante sarà diretto lungo l'asse delle *x* per cui occorre proiettare lungo x tutti i contributi $dE_{2x} = dE_2\cos\theta = \dfrac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o x}\cos\theta d\theta$

$$E_2 = \int dE_{2,x} = \frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o x}\int_{-\pi/6}^{+\pi/6}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o x}[\sin\theta]_{-\pi/6}^{+\pi/6} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o x}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o x} \quad \text{(si attende } \lambda_2<0\text{)}$$

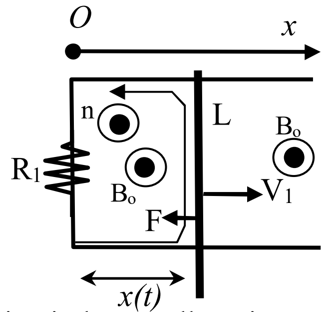
Imponendo il campo risultante nullo in O ($E_1+E_2=0$) si determina la distribuzione lineare incognita

$$\lambda_2 = -\lambda_1\left(\frac{x}{R}\right) = -\lambda_1\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\lambda_1\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{-43.3\ \mu C/m}$$

5. Testo. Due barrette metalliche di egual lunghezza L=40cm e di egual massa m=50g sono libere di spostarsi lungo due guide metalliche parallele come in figura in modo da formare due circuiti elettrici indipendenti di forma rettangolare nel piano orizzontale con resistenze rispettivamente R_1=20Ω , R_2=30Ω. In tutta la regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale B_o=0.5T. Entrambe le barrette vengono lanciate con la medesima velocità iniziale V_o=2m/s lungo l'asse x, a partire dalla posizione iniziale x_o=10cm. Per sincronizzare perfettamente il movimento delle barrette occorre fare una modifica del fattore di forma della seconda barretta (nel circuito con R_2) in modo da introdurre una forza di resistenza passiva del tipo alla velocità della barretta del tipo $\vec{F}_v = -b\vec{v}$ solo nel secondo circuito. Calcolare il valore di b richiesto affinché le due barrette siano sincronizzate nei movimenti. **Facoltativo:** Determinare lo spazio percorso dalle barrette



5. Soluzione. Il circuito complessivo può essere scomposto in due semplici circuiti indipendenti. Nel primo circuito dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira



$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS = B_o \int_0^x dx \int_0^L dy = B_o L \cdot x(t)$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L \cdot V_1$ che porta alla corrente indotta $i = \frac{f_i}{R_1} = -\frac{B_o L \cdot V_1}{R_1}$ che è negativa (la corrente tende quindi a circolare in senso inverso rispetto a quella in figura)

Data la corrente indotta, i quattro lati del circuito subiranno delle forze attrattive di natura magnetica, in accordo alla seconda formula di Laplace $\vec{F} = i \int d\vec{l} \times \vec{B}_o$

In particolare sull'unico lato mobile viene generata una forza frenante $F = iLB_o = B_o^2 L^2 V_1 / R_1$ contraria al moto (asse x) e proporzionale alla velocità della barra. Applicando il II principio della dinamica lungo l'asse del moto

$$-F = -\frac{B_o^2 L^2}{R_1} V_1 = ma = m\frac{dV_1}{dt}$$

da cui si determina la **velocità della prima barretta** $v(t) = V_o \exp(-\alpha t)$ dove $\alpha = \frac{B_o^2 L^2}{m R_1}$ =**0.04 s^{-1}**

Nel **secondo circuito** oltre alla forza magnetica si aggiunge anche una forza di attrito viscoso. Applicando il II principio della dinamica si ottiene

da cui si determina la **velocità della seconda barretta** $v(t) = V_o \exp(-\beta t)$ dove $\beta = \frac{B_o^2 L^2}{m R_2} + \frac{b}{m}$

La sincronizzazione dei movimenti delle due barre si ottiene imponendo l'uguaglianza delle costanti di tempo $\alpha=\beta$ da cui si ricava

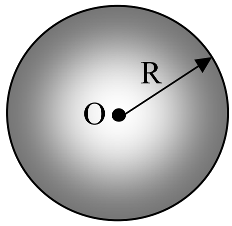
il **coefficiente dell'attrito viscoso** $b = B_o^2 L^2 \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$ =**6.67*10^{-4} kg/s**

Facoltativo: Lo spazio percorso dalle barrette si ottiene integrando l'espressione della velocità comune (*per esempio della prima barretta*)

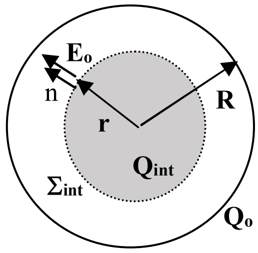
$$\Delta s_1 = \int_0^\infty v(t) dt = V_0 \int_0^\infty \exp(-\alpha t) dt = V_0 \left[-\frac{\exp(-\alpha t)}{\alpha} \right]_0^\infty = \frac{V_0}{\alpha} = V_0 \frac{m R_1}{B_o^2 L^2} = \mathbf{50\ m}$$

Esercizi sostitutivi per la prova scritta del secondo esonero

2. Testo. Sia data una sfera di centro in O e di raggio R=5cm disposta nel vuoto. All'interno di tale sfera sia distribuita una carica con densità volumetrica non uniforme in accordo alla legge $\rho(r) = A + Br$ dove r rappresenta la distanza del generico punto dal centro O. Calcolare i valori dei due parametri A, B che garantiscono le seguenti due condizioni: 1) la carica totale nella sfera è Q_o=10μC. 2) annullamento del campo elettrico sulla sfera interna di raggio r=R/2.



2. Soluzione. Per la simmetria del problema il campo elettrico $E_o(r)$ è radiale e può essere calcolato applicando la legge di Gauss. Per i punti interni che si trovano sulla superficie Σ_{int} di raggio $r<R$, il flusso uscente da Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma\,\mathrm{int}} = \int_{\Sigma\,\mathrm{int}} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere Q_{int}/ε_o, dove il valore della carica interna alla superficie Σ_{int} vale



$$Q_{\mathrm{int}} = \int \rho dV = \int_0^r \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi \int_0^r \left(Ar^2 + Br^3\right) dr = 4\pi\left(\frac{Ar^3}{3} + \frac{Br^4}{4}\right)$$

Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{\mathrm{int}} = \frac{1}{\varepsilon_o}\left(\frac{Ar}{3} + \frac{Br^2}{4}\right)$.

Determinazione dei coefficienti A, B

1. Imponendo che il campo interno sia nullo nei punti r=R/2 si ottiene $B = -\left(\frac{4}{3r}\right)A = -\frac{8}{3R}A$

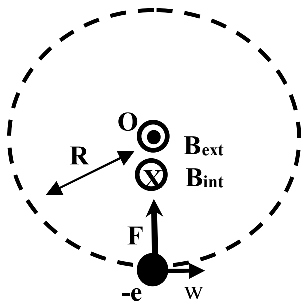
2. Imponendo che la carica totale sulla sfera sia Q_o si ottiene $4\pi\left(\frac{AR^3}{3} + \frac{BR^4}{4}\right) = Q_0$

Combinando le due equazioni si ottengono i parametri

$A = -\frac{3Q_0}{4\pi R^3} =$ **-0.0191 C/m³**, mentre $B = -\frac{8}{3R}A = \frac{2Q_0}{\pi R^4} =$ **+1.019 C/m⁴**

4. Testo. Un elettrone di massa m= 9 10^{-31} kg e di carica in valore assoluto e=1.6 10^{-19} C entra con velocità w in una regione dove è presente un campo di induzione magnetica uniforme di intensità B_{ext}=2T diretto ortogonalmente alla velocità. Conseguentemente l'elettrone subisce una forza magnetica in grado da incurvarne la traiettoria. Dimostrare che la traiettoria è circolare e descrivere l'espressione del campo B_{int} di induzione magnetica generato dall'elettrone nel centro di curvatura della sua traiettoria. Determinare infine il rapporto B_{int}/B_{ext} e calcolare il valore che deve avere la velocità di lancio affinché nel centro di curvatura B_{int}/B_{ext}=0.1.

4. Soluzione. Calcolo del raggio di curvatura dell'elettrone



La forza magnetica produce una accelerazione normale $\vec{F} = -e\vec{w} \times \vec{B}_{ext} = m\vec{a}$

$ewB_{ext} = ma_n = \dfrac{mw^2}{R}$ da cui il raggio di curvatura $R = \dfrac{mw}{eB_{ext}}$

Calcolo del vettore induzione generato dall'elettrone nel punto O

Dalla 1 formula di Laplace $\vec{B}_{\text{int}} = \left(\dfrac{\mu_o}{4\pi}\right)\left(-e\vec{w}\right) \times \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ che ha senso opposto a $\vec{B}_{ext}$

in modulo $B_{\text{int}} = \left(\dfrac{\mu_o}{4\pi}\right)\dfrac{ew}{R^2} = \left(\dfrac{\mu_o}{4\pi}\right)\dfrac{e^3}{m^2 w} B_{ext}^2$

$\dfrac{B_{\text{int}}}{B_{ext}} = \left(\dfrac{\mu_o}{4\pi}\right)\dfrac{e^3}{m^2 w} B_{ext} = 0.1$ da cui la **velocità** $w = \left(\dfrac{1}{0.1}\right)\left(\dfrac{\mu_o}{4\pi}\right)\dfrac{e^3}{m^2} B_{ext} =$ **1.01· 10⁻² m/s**