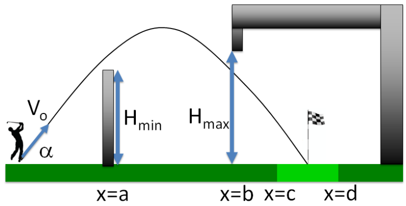
FISICA

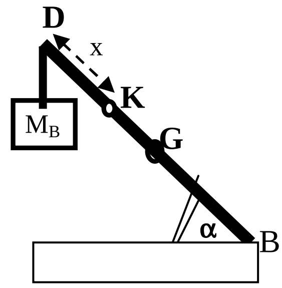
A.A. 2013-2014

Ingegneria Gestionale

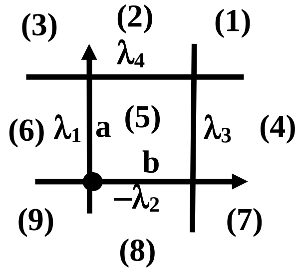
2° appello del 16 Luglio 2014



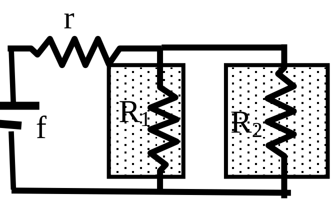
1. Un giocatore di golf lancia la pallina con un alzo di α=50° e con una velocità iniziale V_o in modo che cada più vicino possibile alla buca ad una distanza compresa tra c=120m e d=130m dal punto di battuta. Nel percorso è presente un primo ostacolo di altezza H_{min}=25m ad una distanza a=50m dalla battura che deve essere scavalcato. Nel proseguimento è presente anche un secondo ostacolo ad una distanza b=80m che impedisce alla palla di raggiungere una quota superiore a H_{max}=35m. Determinare quali sono le velocità minima e massima da imprimere inizialmente per evitare gli ostacoli ed entrare sicuramente nella zona utile c<x<d.



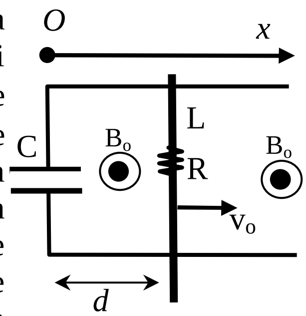
2. Un'asta omogenea avete massa M_A=10kg e lunghezza L=2m ed incernierata in un punto K è libera di ruotare, senza attriti, nel piano verticale descritto in figura. Il punto K, non coincidente con il baricentro G, è posizionato così da avere DK=x=40cm. L'asta inclinata di un angolo di α=30° rispetto all'orizzontale è poggiata al suolo nell'estremo B mentre all'estremo D viene appeso un blocco di massa M_B. Determinare per quale valore di M_B l'asta si distacca dal suolo. **Facoltativo**: ipotizzando M_B=15kg calcolare la velocità dei punti D e B quando l'asta transita per la posizione orizzontale.



3. Su quattro fili rettilinei infinitamente lunghi giacenti sullo stesso piano, di cui due paralleli all'asse x, e due paralleli all'asse y, individuano una regione rettangolare delimitata dai 4 punti di intersezione (a=10cm, b=8cm). Conoscendo le quattro distribuzioni lineari uniformi λ_1=15μC/m, λ_2=6μC/m, λ_3=5μC/m, λ_4=12μC/m indicare in quale area (1,2,3,4,5,6,7,8,9) cade il punto di equilibrio indicandone le coordinate.



4. Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=5kV. I due resistori principali R_1=6 kΩ, R_2=3 kΩ, sono utilizzati come scaldatori per aumentare la temperatura di due bollitori contenenti rispettivamente M_1=1kg e M_2=2kg di acqua distillata. La resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi di fili e generatore. Determinare dopo quanti secondi la massa M_1 contenuta nel primo bollitore si porta dalla temperatura ambiente di 20°C (cui si trova inizialmente l'intero sistema) alla temperatura di 90°C. Determinare a quell'istante a quale temperatura si viene a trovare la massa d'acqua M_2 nel secondo bollitore (calore specifico acqua C=4187 J/kg°C, si trascurino le perdite termiche nei bollitori)



5. Una barretta metallica di lunghezza L=20cm è libera di spostarsi lungo una guida metallica giacente su un piano orizzontale in modo da formare un circuito elettrico di forma rettangolare con resistenza R=5Ω , chiusa su un condensatore inizialmente scarico di capacità C=100μF. Nella regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale di induzione B_o=2T. Assumendo di muovere la barretta, inizialmente posizionata x_o=d=10cm, di moto rettilineo uniforme con velocità v_o=5m/s lungo l'asse x determinare l'espressione temporale della carica che si accumula sul condensatore, l'espressione della corrente, e della forza che occorre esercitare dall'esterno sulla barretta per contrastare la forza elettromagnetica così da mantenere costante la velocitò della stessa. Facoltativo: determinare dopo t=1ms, il lavoro necessario per spostare la barretta, l'energia accumulata nel condensatore, e quella persa per effetto Joule sulla resistenza.

FISICA

A.A. 2013-2014
Ingegneria Gestionale
Soluzioni del 2° appello

1. Equazioni della cinematica. Le grandezze cinematiche vengono scomposte secondo gli assi x,y

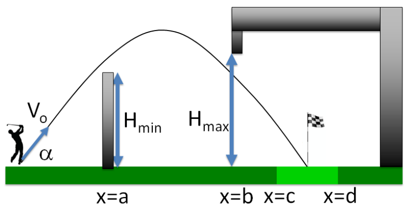
Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o \cos(\alpha) \cdot t \\ v_x(t) = v_o \cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = v_o \sin(\alpha) \cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_o \sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Calcolo della gittata:

il tempo di volo si ottiene imponendo y(t*)=0 da cui $t^* = \dfrac{2v_o \sin(\alpha)}{g}$

la gittata L si ottiene dalla

$$\boldsymbol{L=x(t^*)=} v_o t^* \cos\alpha = \frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_o^2 \sin(2\alpha)}{g}$$



Condizione sulle velocità per atterraggio prossimo alla buca:

$$c \le L = \frac{v_o^2 \sin(2\alpha)}{g} \le d \quad \text{da cui} \quad \sqrt{\frac{gc}{\sin(2\alpha)}} \le v_o \le \sqrt{\frac{gd}{\sin(2\alpha)}} \quad \textbf{(diseq.1)}$$

Equazione della traiettoria:

dalla equazione x(t) si esplicita il tempo $t = \dfrac{x}{v_o \cos\alpha}$ che si sostituisce nell'equazione y(t)

in modo da determinare l'equazione della traiettoria parabolica $y = tg\alpha \cdot x - \left(\dfrac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right)x^2$

Condizione sulla velocità per superare l'ostacolo in x=a:

$$y(a) = tg\alpha \cdot a - \left(\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right)a^2 \ge H_{min} \quad \text{da cui} \quad v_o \ge \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(a \cdot tg\alpha - H_{min})}} = \quad \textbf{(diseq.2)}$$

Condizione sulla velocità per passare sotto il tetto in x=b:

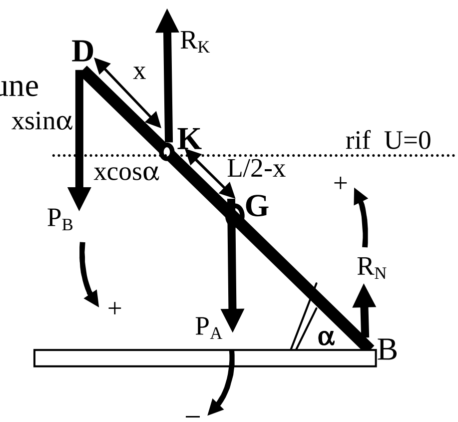
$$y(b) = tg\alpha \cdot b - \left(\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right)b^2 \le H_{max} \quad \text{da cui} \quad v_o \le \frac{b}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(b \cdot tg\alpha - H_{max})}} = \quad \textbf{(diseq.3)}$$

Le tre disequazioni devono essere contemporaneamente soddisfatte

	Condizione	**Commento**
Diseq 1	34.56 m/s $\le v_o \le$ 35.97 m/s	la palla entra nella zona desiderata
Diseq.2	$v_o \ge$ 29.3 m/s	la palla supera l'ostacolo N.1
Diseq.3	$v_o \le$ 35.47 m/s	La palla passa sotto il tetto N.2
Totale	**34.56 m/s $\le v_o \le$ 35.47 m/s**	La diseq.2 è contenuta dalla diseq.1

2. L'asta è soggetta a quattro forze tutte verticali:
La sua forza peso $P_A=M_A g$ applicata nel baricentro **G**
La forza peso del blocco $P_B=M_B g$ che viene trasmessa in **D** tramite la fune
La reazione del cardine R_K nel punto **K**
La reazione del terreno R_N nel punto **B**

La statica è garantita se entrambe le equazioni cardinali sono contemporaneamente nulle



$$\begin{cases} 1°) & R_K + R_N - P_A - P_B = 0 \\ 2°) & P_B x\cos\alpha - P_A\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\alpha + R_N(L-x)\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Al distacco la reazione normale del terreno si annulla **R_N=0** per cui

$$\begin{cases} 1°) & R_K = P_A + P_B \\ 2°) & P_B x\cos\alpha = P_A\left(\frac{L}{2} - x\right)\cos\alpha \end{cases}$$ Dalla seconda si ottiene $M_B = M_A \frac{L/2 - x}{x} = \frac{3}{2} M_A =$ **15 kg**

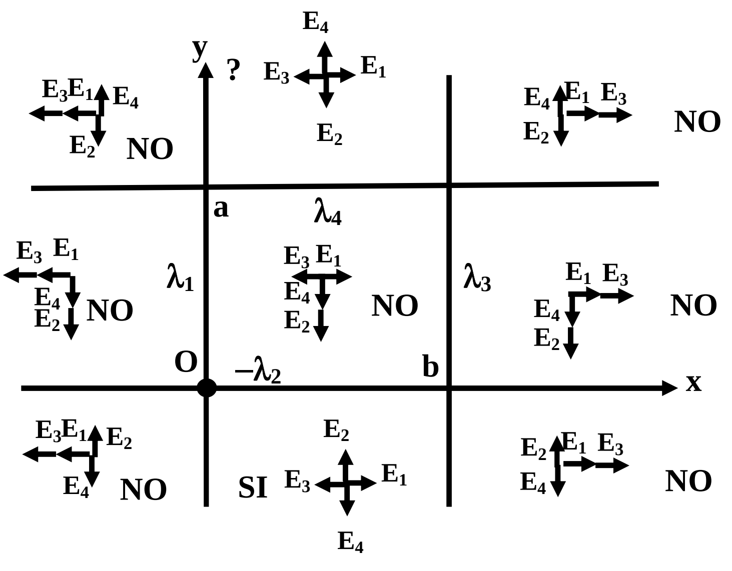
Facoltativo: Nel caso M_B>15kg l'asta si solleva e comincia a ruotare in senso antiorario. La velocità angolare assunta quando la sbarra transita nella posizione orizzontale (rif) si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica.

$U_{iniziale} + T_{iniziale} = U_{rif} + T_{finale}$ ossia $U_{iniziale} = T_{finale}$ e quindi $P_B x sen\alpha - P_A\left(\frac{L}{2} - x\right)sen\alpha = \frac{1}{2} I_K \omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{2gsen\alpha\left[M_B x - M_A\left(\frac{L}{2} - x\right)\right]}{I_K}} = \sqrt{\frac{2gsen\alpha\left[M_B x - M_A\left(\frac{L}{2} - x\right)\right]}{\frac{1}{12}M_A L^2 + M_A \overline{GK}^2 + M_B x^2}} = \mathbf{0}$$ (la barra non si sposta)

da cui le velocità lineari sono entrambe nulle **$V_D=\omega x=0$; $V_B=\omega(L-x)=0$**
(Nel calcolo del momento di inerzia del sistema è stata ipotizzata trascurabile la lunghezza della fune, mentre per la barra è stato applicato il teorema di Huyghens Steiner)

3. Dall'analisi dei 4 contributi di campo elettrico provenienti dalle distribuzioni lineari dei quattro fili indefiniti si evince che fra tutte le 9 differenti regioni del piano le uniche dove è possibile riscontrare una compensazione dei campi elettrici indispensabile alla ricerca del punto di equilibrio, sono le regioni N.2 (0<x<b, y>a) e la N.8 (0<x<b, y<0).



La ricerca del punto in cui si annulla il campo elettrico si ottiene imponendo l'annullamento contemporaneo delle componenti del campo E_x=0 ed E_y=0

Annullamento della componente y del campo nella regione (2) (y>a)

Lungo asse y $E_2 = E_4$; $\quad \dfrac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o y} = \dfrac{\lambda_4}{2\pi\varepsilon_o (y-a)}$ (y>a) da cui $y = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_4} a =$ **-10 cm !!! NO**

Annullamento della componente y del campo nella regione (8) (y<0)

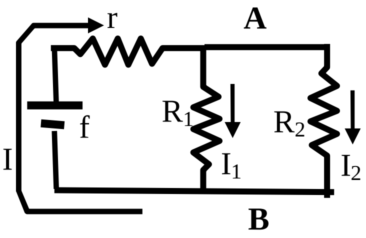
Lungo asse y $E_2 = E_4$; $\quad \dfrac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o |y|} = \dfrac{\lambda_4}{2\pi\varepsilon_o (a-y)}$ (y<0) da cui $y = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_4} a =$ **-10 cm (SI)**

Annullamento della componente x

Lungo asse x $E_1 = E_3$; $\quad \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o x} = \dfrac{\lambda_3}{2\pi\varepsilon_o (b-x)}$ (0<x<b) da cui $x = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} b =$ **6 cm**

Il punto dove si annulla il campo elettrico **è x_P=6 cm, y_P= -10 cm.**

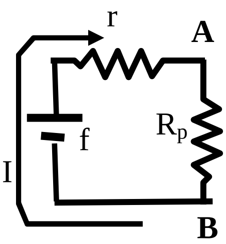
4. Il circuito elettrico è formato da due maglie riducibili ad una sola quando al posto di R_1 ed R_2 si considera la resistenza parallelo $R_p = R_1 // R_2 = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} =$ **2 kΩ**



la **intensità di corrente elettrica** erogata dalla batteria vale $I = \dfrac{f}{r + R_p} =$ **2A**

La ripartizione nei due rami resistivi si calcola confrontando le espressioni della differenza di potenziale nel circuito reale ed in quello equivalente

$V_A - V_B = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I R_p$ da cui



$I_1 = I \cdot R_p / R_1 = I/3 =$ **0.667 A**

$I_2 = I \cdot R_p / R_2 = 2I/3 =$ **1.333 A**

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulle resistenze

$P_1 = I_1^2 R_1 = I^2 R_p^2 / R_1 =$**2.67 kW;** $\quad P_2 = I_2^2 R_2 = I^2 R_p^2 / R_2 =$ **5.33 kW;** da cui $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{R_1}{R_2}$

Il **calore sviluppato** in un tempo **τ** nei due bollitori è quindi

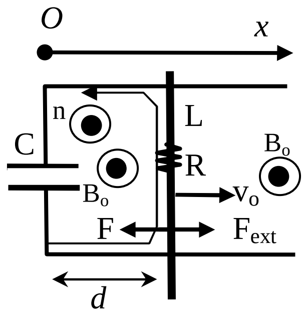
$Q_1 = P_1 \tau$ **;** $Q_2 = P_2 \tau$ **da cui** $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{R_1}{R_2}$

Il calore necessario per portare il primo bollitore alla temperatura T_1=90°C si ottiene dalla equazione calorimetrica

$Q_1 = M_1 C (T_1 - T_{amb})$ **= 293 kJ** da cui il tempo che è necessario attendere è quindi **$\tau = Q_1/P_1$= 110 s**

Dal raffronto tra i calori sviluppati tra i due bollitori $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{M_2 C (T_2 - T_{amb})}{M_1 C (T_1 - T_{amb})}$

si ottiene la temperatura del secondo bollitore al tempo τ: $T_2 = T_{amb} + \left(\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right)(T_1 - T_{amb}) = T_1$ **=90°C**



5. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$,
si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:

$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int BdS = B_o \int_0^x dx \int_0^L dy = B_o L \cdot x(t)$$

Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L \cdot v_o$

Nel circuito oltre alla forza elettromotrice indotta è anche presente una capacità.

$i(t)R + \frac{q(t)}{C} = f_i = -B_o L v_o$ con soluzione $q(t) = -B_o L v_o C[1 - \exp(-t/RC)]$

(la corrente circola in senso opposto ed il condensatore ha tensione negativa**)**

l'intensità di corrente indotta nel circuito $i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{B_o L v_o}{R} \exp(-t/RC)$ (in senso opposto)

e con la 2ª di Laplace la forza sulla barretta $F = iLB_o = -\frac{B_o^2 L^2 v_o}{R} \exp(-t/RC)$ (opposta asse x)

la forza che occorre esercitare per mantenere costante la velocità della barra $F^{ext} = -F = \frac{B_o^2 L^2 v_o}{R} \exp(-t/RC)$**=0.022 N** al tempo t**=1ms** (lungo asse x).

Facoltativo: La forza esterna compie il lavoro

$$L^{ext} = \int F^{ext} dx = \int_0^t F^{ext} v_o dt = \frac{(B_o \cdot L)^2 v_o^2}{R} \int_0^t \exp(-t/RC) dt = B_o^2 L^2 v_o^2 C[1 - \exp(-t/RC)]$$ **=346 μJ**

L'energia dissipata per effetto Joule sulla resistenza

$$E_R = \int_0^t i^2 R dt = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2}{R} \int_0^t \exp(-2t/RC) dt = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2 C}{2} [1 - \exp(-2t/RC)]$$ **=196 μJ**

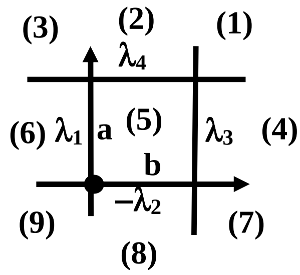
L'energia immagazzinata nel condensatore

$$\Delta E_C = \frac{q^2(t)}{2C} - \frac{q^2(0)}{2C} = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2 C}{2} [1 - \exp(-t/RC)]^2$$ **=150 μJ**

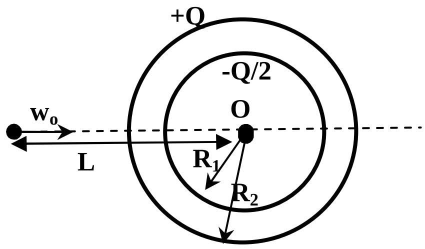
FISICA

A.A. 2013-2014
Ingegneria Gestionale
SECONDO ESONERO
2° appello del 16 Luglio 2014

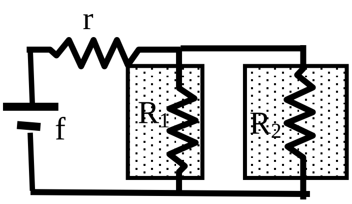
1. Su quattro fili rettilinei infinitamente lunghi giacenti sullo stesso piano, di cui due paralleli all'asse x, e due paralleli all'asse y, individuano una regione rettangolare delimitata dai 4 punti di intersezione (a=10cm, b=8cm). Conoscendo le quattro distribuzioni lineari uniformi λ_1=15μC/m, λ_2=6μC/m, λ_3=5μC/m, λ_4=12μC/m indicare in quale area (1,2,3,4,5,6,7,8,9) cade il punto di equilibrio indicandone le coordinate. (nota bene. La seconda distribuzione è negativa)



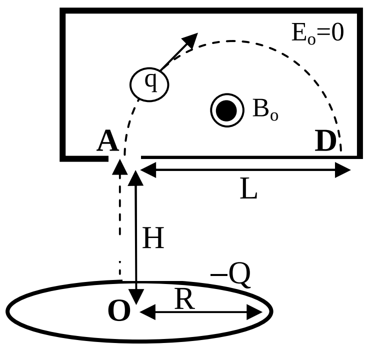
2. Due gusci conduttori sferici di raggio rispettivamente R_1, R_2, e di carica corrispondente +Q, -Q/2, sono disposti in modo da avere centro comune O. Una carica puntiforme +q di massa m viene lanciata lungo una traiettoria radiale dall'esterno contro i gusci da una distanza L=5cm dal centro. Determinare le velocità con cui la carica attraversa ciascun guscio, supponendo di poterlo penetrare senza attriti. [**Dati**: R_1=1cm, R_2=4cm, Q=1μC, q= 10nC, m=1g, w_o=4m/s]



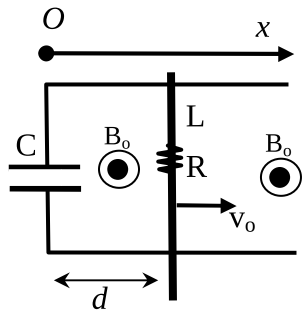
3. Il dispositivo in figura si compone di un circuito resistivo alimentato da una forza elettromotrice f=5kV. I due resistori principali R_1=6 kΩ, R_2=3 kΩ, sono utilizzati come scaldatori per aumentare la temperatura di due bollitori contenenti rispettivamente M_1=1kg e M_2=2kg di acqua distillata. La resistenza interna del circuito r=500 Ω tiene in conto di tutti gli effetti resistivi di fili e generatore. Determinare dopo quanti secondi la massa M_1 contenuta nel primo bollitore si porta dalla temperatura ambiente di 20°C (cui si trova inizialmente l'intero sistema) alla temperatura di 90°C. Determinare a quell'istante a quale temperatura si viene a trovare la massa d'acqua M_2 nel secondo bollitore (calore specifico acqua C=4187 J/kg°C, si trascurino le perdite termiche nei bollitori)



4. Una carica q=100μC, di massa m=1g situata nel centro O di un anello uniformemente carico con carica -10μC e raggio R=10cm, viene lanciata con velocità w_o lungo l'asse del disco in modo da percorrere la distanza H=5cm ed entrare dalla fessura A in una camera a campo magnetico uniforme B_o=10T, e schermata dal campo elettrico. Nella camera lo ione descrive un arco di circonferenza fino ad urtare la parete della camera a distanza L=1m dalla fenditura. Determinare la velocità iniziale w_o



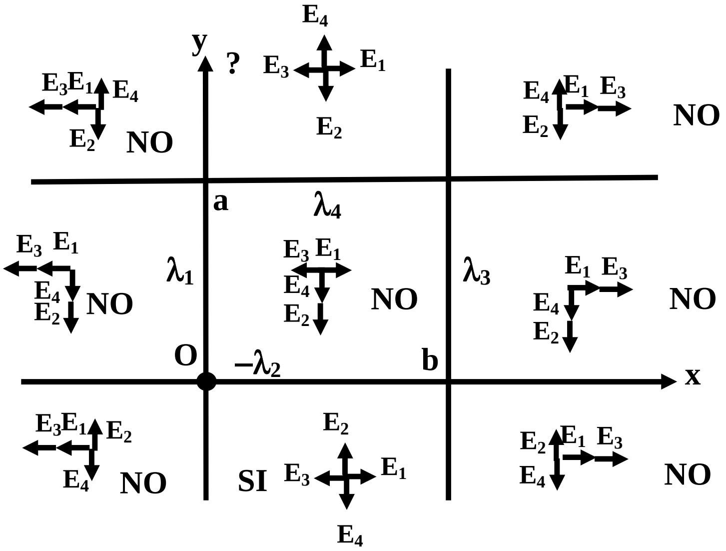
5. Una barretta metallica di lunghezza L=20cm è libera di spostarsi lungo una guida metallica giacente su un piano orizzontale in modo da formare un circuito elettrico di forma rettangolare con resistenza R=5Ω, chiusa su un condensatore inizialmente scarico di capacità C=100μF. Nella regione piana è presente un vettore induzione magnetica uniforme verticale di induzione B_o=2T. Assumendo di muovere la barretta, inizialmente posizionata x_o=d=10cm, di moto rettilineo uniforme con velocità v_o=5m/s lungo l'asse x determinare l'espressione temporale della carica che si accumula sul condensatore, l'espressione della corrente, e della forza che occorre esercitare dall'esterno sulla barretta per contrastare la forza elettromagnetica così da mantenere costante la velocitò della stessa. Facoltativo: determinare dopo t=1ms, il lavoro necessario per spostare la barretta, l'energia accumulata nel condensatore, e quella persa per effetto Joule sulla resistenza.



FISICA

A.A. 2013-2014
Ingegneria Gestionale
SECONDO ESONERO
Soluzioni del 2° appello

1. Dall'analisi dei 4 contributi di campo elettrico provenienti dalle distribuzioni lineari dei quattro fili indefiniti si evince che fra tutte le 9 differenti regioni del piano le uniche dove è possibile riscontrare una compensazione dei campi elettrici indispensabile alla ricerca del punto di equilibrio, sono le regioni N.2 (0<x<b, y>a) e la N.8 (0<x<b, y<0).



La ricerca del punto in cui si annulla il campo elettrico si ottiene imponendo l'annullamento contemporaneo delle componenti del campo E_x=0 ed E_y=0

Annullamento della componente y del campo nella regione (2) (y>a)

Lungo asse y $E_2 = E_4;\quad \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o y} = \frac{\lambda_4}{2\pi\varepsilon_o (y-a)}$ (y>a) da cui $y = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_4} a =$ **-10 cm !!! NO**

Annullamento della componente y del campo nella regione (8) (y<0)

Lungo asse y $E_2 = E_4;\quad \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o |y|} = \frac{\lambda_4}{2\pi\varepsilon_o (a-y)}$ (y<0) da cui $y = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_4} a =$ **-10 cm (SI)**

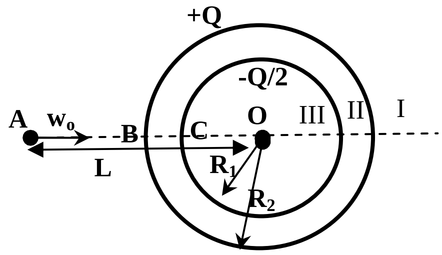
Annullamento della componente x

Lungo asse x $E_1 = E_3;\quad \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o x} = \frac{\lambda_3}{2\pi\varepsilon_o (b-x)}$ (0<x<b) da cui $x = \frac{\lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} b =$ **6 cm**

Il punto dove si annulla il campo elettrico **è x_P=6 cm, y_P= -10 cm.**

2. Ciascun guscio conduttore genera un potenziale con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} V_{\text{int}} = \dfrac{Q_{guscio}}{4\pi\varepsilon_o R_{guscio}} \\ V_{ext} = \dfrac{Q_{guscio}}{4\pi\varepsilon_o r} \end{cases}$$



Applicando la sovrapposizione degli effetti si possono determinare
i potenziali elettrici nelle varie regioni I, II, II, ed in particolare
in corrispondenza del punto iniziale A, e sui due gusci sferici B,C

$$\begin{cases} V_I = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o r} = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_o r} \\ V_{II} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_2} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o r} \\ V_{III} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o R_2} + \dfrac{-Q/2}{4\pi\varepsilon_o R_1} \end{cases}$$

e nei punti A,B,C

$$\begin{cases} V_A = V_I(L) = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_o L} \\ V_B = V_I(R_2) = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_o R_2} \\ V_C = V_{III}(R_1) = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{2}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) \end{cases}$$

Applicando la conservazione dell’energia tra lo stato iniziale e quello di attraversamento dei gusci

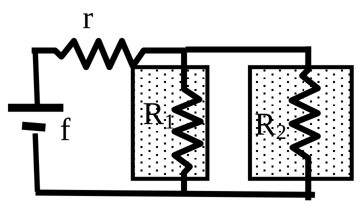
$$E_A = E_B = E_C; \qquad \frac{1}{2}mw_o^2 + qV_A = \frac{1}{2}mw_B^2 + qV_B = \frac{1}{2}mw_C^2 + qV_C$$

da cui $\quad w_B = \sqrt{w_o^2 - \dfrac{2q(V_B - V_A)}{m}} = \sqrt{w_o^2 - \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m}\dfrac{L - R_2}{LR_2}} = \mathbf{3.94\ m/s}$

da cui $\quad w_C = \sqrt{w_o^2 - \dfrac{2q(V_C - V_A)}{m}} = \sqrt{w_o^2 - \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m}\left(\dfrac{2}{R_2} - \dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{L}\right)} = \mathbf{4.72\ m/s}$

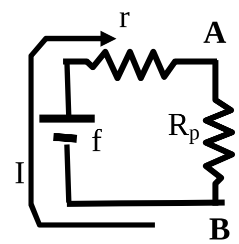
3. . Il circuito elettrico è formato da due maglie riducibili ad una sola quando al posto di R_1 ed R_2 si considera la resistenza parallelo $R_p = R_1 // R_2 = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \mathbf{2\ k\Omega}$

la **intensità di corrente elettrica** erogata dalla batteria vale $I = \dfrac{f}{r + R_p} = \mathbf{2A}$



La ripartizione nei due rami resistivi si calcola confrontando le espressioni
della differenza di potenziale nel circuito reale ed in quello equivalente

$V_A - V_B = I_1 R_1 = I_2 R_2 = IR_p$ da cui



$I_1 = I \cdot R_p / R_1 = I/3 = \mathbf{0.667\ A}$

$I_2 = I \cdot R_p / R_2 = 2I/3 = \mathbf{1.333\ A}$

La **potenza dissipata** per effetto Joule sulle resistenze

$P_1 = I_1^2 R_1 = I^2 R_p^2 / R_1$ **=2.67 kW;** $P_2 = I_2^2 R_2 = I^2 R_p^2 / R_2 =$ **5.33 kW;** da cui $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{R_1}{R_2}$

Il **calore sviluppato** in un tempo $\boldsymbol{\tau}$ nei due bollitori è quindi

$Q_1 = P_1\tau$ **;** $Q_2 = P_2\tau$ **da cui** $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{R_1}{R_2}$

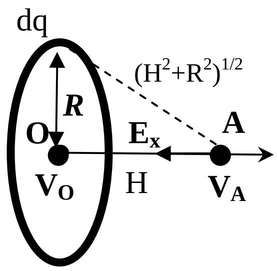
Il calore necessario per portare il primo bollitore alla temperatura T_1=90°C si ottiene dalla equazione calorimetrica

$Q_1 = M_1 C(T_1 - T_{amb})$ **= 293 kJ** da cui il tempo che è necessario attendere è quindi **τ=Q₁/P₁= 110 s**

Dal raffronto tra i calori sviluppati tra i due bollitori $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{M_2 C(T_2 - T_{amb})}{M_1 C(T_1 - T_{amb})}$

si ottiene la temperatura del secondo bollitore al tempo τ: $T_2 = T_{amb} + \left(\dfrac{M_1 R_1}{M_2 R_2}\right)(T_1 - T_{amb}) = T_1$ **=90°C**

4. Potenziale elettrico prodotto da un anello uniformemente carico.

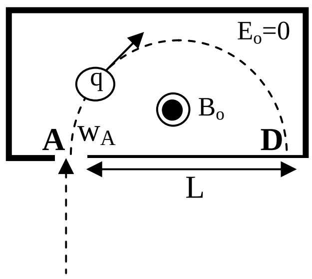


Il contributo di potenziale elettrico dV_A prodotto nel punto A dalla carica dq disposta su un elemento dell'anello è

$dV_A = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{H^2+R^2}}$ che integrato diviene $V_A = \int dV_A = \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{H^2+R^2}}$

Il potenziale nel centro O è invece $V_O = \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_o R}$ (la carica totale sull'anello è –Q)

La relazione tra le velocità di lancio w_o e di entrata nella camera w_A si ottiene dalla conservazione dell'energia.



$E_0 = E_A;$ $\dfrac{1}{2} m w_o^2 + qV_O = \dfrac{1}{2} m w_A^2 + qV_A$

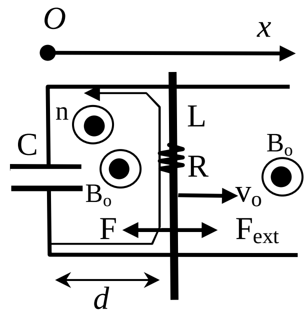
da cui $w_O = \sqrt{w_A^2 + \dfrac{2q(V_A - V_O)}{m}} = \sqrt{w_A^2 + \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_o m}\left[\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2+H^2}}\right]}$

Determinazione della velocità di ingresso.

Appena entrato dall'apertura A nella camera *C* lo ione subisce una forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{w}\times\vec{B}_o$, centripeta, che gli fa descrivere un moto circolare uniforme. Applicando il II principio la forza di Lorentz deve produrre l'accelerazione normale del moto $F_L = qw_A B_o = ma_n = mw_A^2/r$, da cui si ricava la velocità $w_A = \dfrac{qB_o r}{m} = \dfrac{qB_o L}{2m}$ **=0.5 m/s**.

Combinando le equazioni si ha infine $w_O = \sqrt{\left(\dfrac{qB_o L}{2m}\right)^2 + \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_o m}\left[\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{\sqrt{R^2+H^2}}\right]}$ **= 68.9 m/s**

5. Dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c:



$$\Phi_c = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \int B dS = B_o \int_0^x dx \int_0^L dy = B_o L \cdot x(t)$$

Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -B_o L \cdot v_o$

Nel circuito oltre alla forza elettromotrice indotta è anche presente una capacità.

$i(t)R + \frac{q(t)}{C} = f_i = -B_o L v_o$ con soluzione $q(t) = -B_o L v_o C[1 - \exp(-t/RC)]$

(la corrente circola in senso opposto ed il condensatore ha tensione negativa**)**

l'intensità di corrente indotta nel circuito $i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{B_o L v_o}{R}\exp(-t/RC)$ (in senso opposto)

e con la 2[a] di Laplace la forza sulla barretta $F = iLB_o = -\frac{B_o^2 L^2 v_o}{R}\exp(-t/RC)$ (opposta asse x)

la forza che occorre esercitare per mantenere costante la velocità della barra $F^{ext} = -F = \frac{B_o^2 L^2 v_o}{R}\exp(-t/RC)$**=0.022 N** al tempo t**=1ms** (lungo asse x).

Facoltativo: La forza esterna compie il lavoro

$$L^{ext} = \int F^{ext} dx = \int_0^t F^{ext} v_o dt = \frac{(B_o \cdot L)^2 v_o^2}{R}\int_0^t \exp(-t/RC) dt = B_o^2 L^2 v_o^2 C[1 - \exp(-t/RC)]$$ **=346 μJ**

L'energia dissipata per effetto Joule sulla resistenza

$$E_R = \int_0^t i^2 R dt = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2}{R}\int_0^t \exp(-2t/RC) dt = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2 C}{2}[1 - \exp(-2t/RC)]$$ **=196 μJ**

L'energia immagazzinata nel condensatore

$$\Delta E_C = \frac{q^2(t)}{2C} - \frac{q^2(0)}{2C} = \frac{B_o^2 L^2 v_o^2 C}{2}[1 - \exp(-t/RC)]^2$$ **=150 μJ**