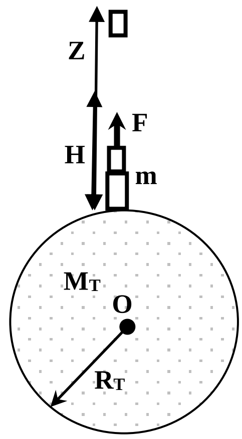
FISICA

A.A. 2021-2022
Ingegneria Gestionale
2° appello del 18 Luglio 2022

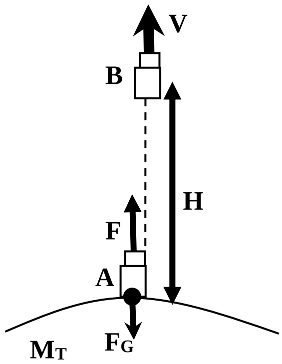
Esame completo - Soluzioni

1. Testo. Un programma di imprese spaziali prevede il lancio nello spazio profondo di una navicella inizialmente posizionata in una area sulla superficie terrestre. Essa è composta di due stadi collegati: un modulo propulsivo (nella parte in basso) di 400 kg, ed un modulo abitativo (nella parte in alto) di 200 kg. Alla accensione dei razzi viene fornita una spinta verso l'alto pari a $F=2\cdot10^5$ N costante fino alla quota H=1000 km dalla superficie terrestre. Determinare la velocità della navicella quando raggiunge la quota H. Successivamente per un malfunzionamento la forza propulsiva cessa ed il modulo propulsivo di 400 kg viene espulso in un tempo brevissimo alla velocità di V_r=1000 m/s (relativa alla navicella) nella direzione opposta a quella del moto in modo da fornire una ulteriore spinta che aumenta istantaneamente la velocità della navicella. Determinare la sua velocità dopo l'espulsione e quale sarà la quota massima Z raggiunta prima di ricadere sulla Terra. Dati: $G=6.67\cdot10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}, massa della Terra $M_T=6\cdot10^{24}$ kg, raggio terrestre R_T=6350 km.



1. Soluzione. FASE I

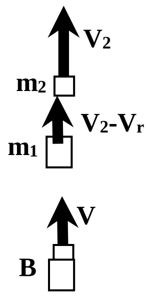
La forza F è in grado di sollevare verso l'alto la navicella superando la forza di attrazione gravitazionale $F = \mathbf{20000N} > F_G = G\dfrac{M_T \cdot m}{r^2} = \mathbf{5955\ N}$



Analizzando l'energia meccanica nei punti A e B è possibile trovare la velocità raggiunta nel punto B. Il lavoro fatto dalla forza propulsiva F fa aumentare l'energia meccanica della navicella:

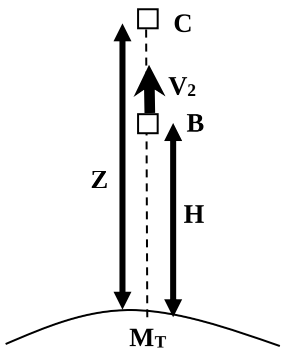
$$L_F = E_{mB} - E_{mA} \quad \text{ossia} \quad \int_A^B F ds = FH = \left(\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GM_T m}{R_T}\right) - \left(-\frac{GM_T m}{R_T + H}\right)$$

da cui la velocità nel punto B vale $V = \sqrt{2\cdot H\left(\dfrac{F}{m} - \dfrac{GM_T}{R_T(R_T+H)}\right)} = \mathbf{7037\ m/s}$



FASE II. Quando il modulo propulsivo m_1=400 kg viene espulso alla velocità relativa V_R=1000 m/s nella direzione opposta, la velocità del modulo m_2=200 kg aumenta. La nuova velocità V_2 si ottiene dalla conservazione della quantità di moto del sistema:

$$(m_1+m_2)V = m_2V_2 + m_1(V_2 - V_R) \qquad \text{da cui} \qquad V_2 = V + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)V_R = \mathbf{7704\ m/s}$$

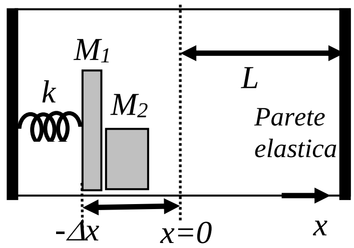


FASE III. Il modulo m_2 infine sale dal punto B con velocità maggiorata V_2 fino al punto di massima altezza Z dove il modulo si ferma ed inverte il suo moto. La posizione Z viene ottenuta imponendo la conservazione dell'energia.

$$E_{mC} = E_{mB} \quad \text{ossia} \quad \left(-\frac{GM_T m_2}{R_T + Z}\right) = \left(\frac{1}{2}m_2V_2^2 - \frac{GM_T m_2}{R_T+H}\right)$$

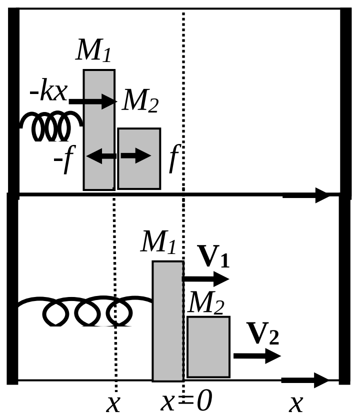
che permette di trovare la massima altezza $Z = \left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_T+H} - \dfrac{V_2^2}{2GM_T}}\right) - R_T$ **=9802 km**

2. Testo. Un piattello di massa M_1=3 kg, è saldamente attaccato ad una molla di massa trascurabile di costante elastica k=20 N/m. Il sistema è libero di oscillare lungo un piano liscio orizzontale. La molla viene compressa di una quantità Δx=10 cm ed una seconda massa M_2=1 kg viene appoggiata al piattello M_1. Tutto il sistema viene tenuto inizialmente bloccato. Non appena viene sbloccato al tempo t=0 il piattello sospinge la massa M_2. Determinare la posizione e l'istante in cui la massa M_2 si separa dal piattello M_1, la velocità raggiunta da M_2, la posizione di massima elongazione della molla. Infine determinare a quale distanza minima L va posizionata una parete elastica in modo che la massa M_2 si risincronizzi con il piattello senza urtarlo.



2. Soluzione. FASE I

Inizialmente il piattello M_1 rilascia energia elastica e spinge il blocco M_2 in avanti. In questa fase le due masse M_1 ed M_2 rimangono attaccate, si muovono insieme con la stessa accelerazione *a*. La reazione vincolare interna di contatto *f* fra M_1 e M_2 agisce su entrambe le masse in senso opposto secondo il III principio della dinamica. Applicando il II principio lungo l'asse x per ciascun blocco



$$\begin{array}{l} M_1) \\ M_2) \end{array}\begin{cases} -kx - f = M_1 a \\ \quad + f = M_2 a \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{array}{c} M_1 + M_2) \\ M_2) \end{array}\begin{cases} -kx = (M_1 + M_2)\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ f = M_2 a = -k\left(\dfrac{M_2}{M_1+M_2}\right)x \end{cases}$$

EQUAZIONE DEL MOTO

La prima equazione differenziale ha come soluzione il moto armonico delle masse $x(t) = -\Delta x \cdot \cos(\omega_o t)$ dove la pulsazione è data da $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{M_1+M_2}} = \mathbf{2.236\ rad/s}$

CONDIZIONE DI DISTACCO

La seconda equazione $f = -k\left(\dfrac{M_2}{M_1+M_2}\right)x$ consente di determinare la **condizione di distacco fra i blocchi** quando la reazione vincolare si annulla ***f=0*** evento che avviene in ***x=0*** quando la molla raggiunge la posizione di riposo (per x>0 le due masse viaggiano separatamente ed f scompare)

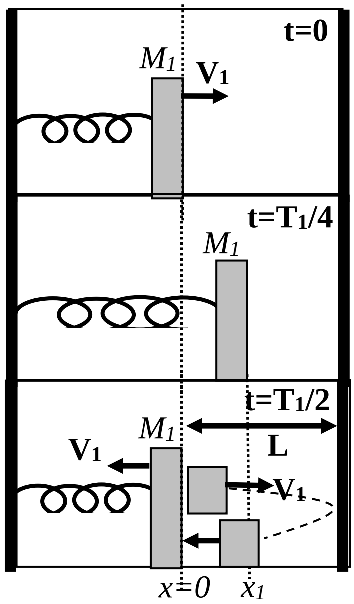
Per calcolare **il tempo t_o al quale avviene il distacco** basta imporre $x(t) = -\Delta x \cdot \cos(\omega_o t) = \mathbf{0}$

da cui si ottiene $\omega_o t_o = \dfrac{\pi}{2}$ e quindi **il tempo** $t_o = \dfrac{\pi}{2\omega_o} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M_1+M_2}{k}} = \mathbf{0.702\ s}$

La velocità comune ai blocchi si ottiene derivando il moto armonico $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \omega_0 \Delta x \cdot \sin(\omega_o t)$**.**

Al distacco il seno è unitario e le velocità valgono $V_1 = V_2 = \omega_o \Delta x = \sqrt{\dfrac{k}{M_1+M_2}}\Delta x = \mathbf{0.224\ m/s}$

FASE II – Moto armonico del piattello M_1 dopo il distacco



Il successivo moto armonico del piattello avviene con una pulsazione maggiorata $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M_1}} =$ **2.58 rad/s** e periodo $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M_1}{k}} =$ **2.43 s**

La massima elongazione della molla si calcola imponendo la conservazione dell'energia meccanica che da energia cinetica massima si trasforma in energia potenziale massima.

$\frac{1}{2}M_1V_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2$ da cui $x_1 = V_1\sqrt{\frac{M_1}{k}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_1+M_2}}\Delta x =$ **8.7 cm**

ciò avviene dopo un quarto di periodo a partire dal distacco

$t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_1}{k}} =$ **0.608 s**

FASE III – Nuovo contatto fra i due blocchi.

Il blocco M_2 lanciato al distacco in t=0 a velocità $V_2=V_1=$**0.224 m/s** contro la parete elastica, rimbalza ed inverte la sua velocità. L'urto con il piattello è scongiurato solo se le masse M_1 e M_2 si ritrovano a contatto in x=0 con velocità uguali $V_2=V_1$ dirette nello stesso verso così da non urtare. Ciò avviene se l'incontro è sincronizzato come segue.

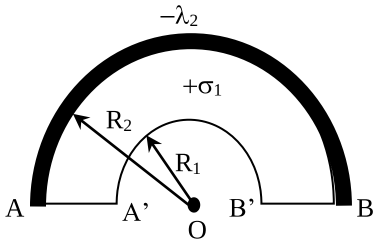
La prima massa M_1 si ritrova in x=0 con velocità V_1 diretta verso sinistra in tutti i tempi $\Delta t = \frac{T_1}{2} + mT_1 = \left(m+\frac{1}{2}\right)T_1 = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{\omega_1} = \left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi\sqrt{\frac{M_1}{k}}$ con m intero 0,1,2…

La seconda massa M_2 si ritrova in x=0 con velocità $V_2 = V_1$ diretta verso sinistra dopo aver percorso uno spazio 2L (fino alla parete e ritorno) $\Delta t = \frac{2L}{V_1} = \frac{2L}{\Delta x\sqrt{\frac{k}{M_1+M_2}}} = \frac{2L}{\Delta x}\sqrt{\frac{M_1+M_2}{k}}$

Le coincidenze temporali avvengono se la parete è posizionata ad $L_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{M_1}{M_1+M_2}}\Delta x$

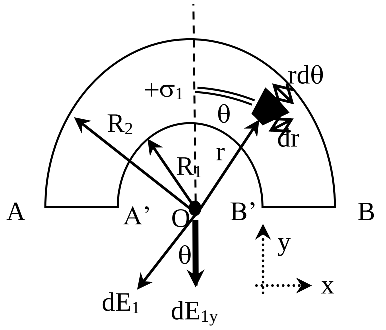
La distanza minima della parete si ottiene per m=0 quando $L_0 = \Delta x \cdot \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_1}{M_1+M_2}} =$ **13.6 cm**

3. Testo. La distribuzione di carica illustrata in figura viene distribuita come segue: sulla corona semicircolare AA'B'B di centro O e di raggio esterno R_2=10 cm ed interno R_1=5cm è distribuita uniformemente una carica positiva con densità superficiale $+\sigma_1$=100μC/m^2. Per contro sul bordo esterno della corona semicircolare ossia sulla semicirconferenza AB di centro O e di raggio R_2 viene collocata una carica con densità lineare uniforme negativa $-\lambda_2$; Sapendo che il campo elettrico in O si annulla determinare il valore della densità λ_2. Determinare anche il valore del campo elettrico della singola distribuzione di caruica (positiva e negativa)



3. Soluzione. Campo elettrico generato dalla corona semicircolare

La carica infinitesima dq disposta sul settore circolare infinitesimo di area dS=rdrdθ genera nel punto *O* (alla distanza r con $R_1<r<R_2$) un contributo di campo elettrico $dE_1 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \dfrac{\sigma_1 r dr d\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \dfrac{\sigma_1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{dr}{r}d\theta$ (vedi figura)



Per ragioni di simmetria il vettore risultante E_1 è tutto diretto lungo l'asse delle *y (in senso contrario). C*onviene quindi proiettare il contributo efficace di campo elettrico lungo l'asse *y*

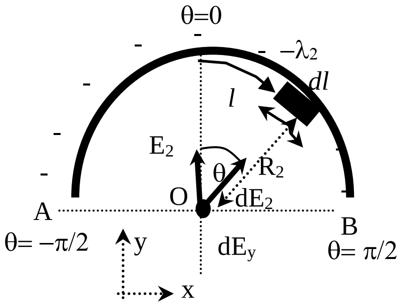
$dE_{1y} = -dE_1\cos\theta$ (*il segno indica che è in senso opposto all'asse y*)

per poi integrarlo su tutta la distribuzione per ottenere il campo elettrico E_1

$$E_1 = \int dE_y = -\frac{\sigma_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{-\sigma_1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \text{(Eq.1)}$$

Campo elettrico generato dalla semicirconferenza

La carica infinitesima dq disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima $dl=R_2 d\theta$ della semicirconferenza, genera nel punto *O* (alla distanza R_2) un contributo di campo elettrico $dE_2 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o R_2^2} = \dfrac{\lambda_2 R_2 d\theta}{4\pi\varepsilon_o R_2^2} = \dfrac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o R_2}d\theta$ diretto come in figura. Analogamente assumendo per ragioni di simmetria il vettore risultante E_2 tutto diretto lungo l'asse delle *y (nello stesso senso)* si conviene di proiettare il contributo efficace di campo elettrico lungo l'asse *y*



$dE_{2y} = dE_2\cos\theta$ (lungo *asse y*)

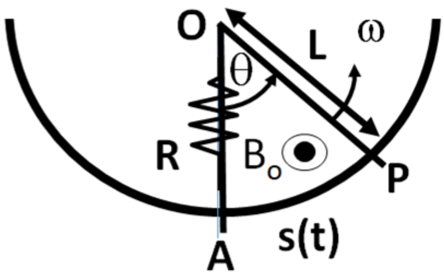
per poi integrarlo su tutta la distribuzione sulla semicirconferenza

$$E_2 = \int dE_{2y} = +\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda_2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R_2}d\theta = \frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_o R_2}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R_2} \quad \text{(Eq.2)}$$

I due campi E_1 ed E_2 si controbilanciano quando (mettendo a sistema Eq.1 ed Eq.2)

$$\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R_2} = \frac{\sigma_1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \text{da cui} \quad \lambda_2 = \sigma_1\cdot R_2\cdot\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \sigma_1\cdot R_2\ln 2 = \mathbf{6.93\ \mu C/m}$$

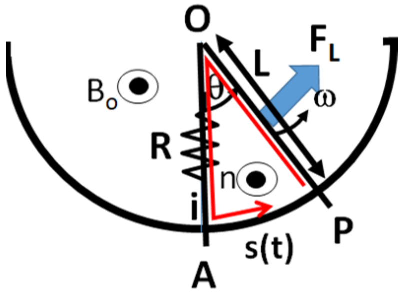
4. Testo Una barretta metallica omogenea di massa m, di lunghezza L di estremi OP è vincolata a ruotare lungo una guida metallica semicircolare di raggio L, giacente in un piano verticale, che chiude un circuito elettrico a forma di settore circolare AOP dove O è l'estremo vincolato della barretta mentre P è l'estremo libero. Il circuito di resistenza elettrica complessiva R giace in un piano verticale dove è applicato un vettore induzione magnetica orizzontale (con verso uscente dal foglio) B_o. La barra, tenuta inizialmente inclinata di un piccolo angolo θ=15° rispetto alla verticale, è soggetta alla forza peso che tende a metterla in oscillazione (piccole oscillazioni del pendolo composto). Determinare il valore minimo di B_o per cui la barretta grazie alla forza di Lorentz ruota lentamente senza oscillazioni fino a raggiungere la posizione verticale. [Dati: L=40cm, R=3Ω, m=15g, momento d'inerzia $I_o=mL^2/3$]



4. Soluzione. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira (avente forma di settore circolare) in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira Φ_c

$$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = B_o S_{AOP} = B_o \frac{s(t) \cdot L}{2} = B_o \left[\frac{1}{2} L^2 \theta(t) \right]$$

dove per l'arco di circonferenza s vale la relazione s(t)=L·θ(t)



Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira in funzione dell'angolo (velocità angolare della sbarra)

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{ B_o \left[\frac{1}{2} L^2 \theta(t) \right] \right\} = -\frac{L^2 B_o}{2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L^2 B_o}{2} \omega$$

dove ω è la velocità angolare che è positiva per rotazione antiorarie (nel moto del pendolo la rotazione è alternata quindi è opportuno fare riferimento a quella corrispondente ad un angolo θ crescente per default)

L'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene dividendo per la resistenza $i = \frac{f_i}{R} = -\frac{L^2 B_o}{2R} \frac{d\theta}{dt}$ (il segno meno indica un senso opposto alla figura).

La forza frenante sul lato mobile è quindi $F = iLB_o = -\frac{L^3 B_o^2}{2R} \frac{d\theta}{dt}$ (il segno meno indica quindi un senso opposto a quello rappresentato in figura, ossia si tratta di una forza frenante)

Moto di rotazione della barretta. Pendolo composto.

La barra è vincolata a ruotare intorno al punto O. Il moto risultante della barra è del tipo di quella relativa al pendolo composto soggetto al momento della forza peso e al momento della forza magnetica calcolati rispetto ad un asse orizzontale per O (il momento della reazione cardinale e quindi nullo).

Applicando la II equazione cardinale si ha $M_P + M_{FL} = I_O \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Essendo:

M_P il momento assiale della forza peso; $M_P = -mg\dfrac{L}{2}\sin\theta \cong -mg\dfrac{L}{2}\theta$ (per piccole inclinazioni)

M_{FL} il momento della forza magnetica; $M_{FL} = \int_0^L r\cdot dF = iB_o\int_0^L rdr = -\dfrac{L^4B_o^2}{4R}\omega = -\dfrac{L^4B_o^2}{4R}\dfrac{d\theta}{dt}$

I_o il momento di inerzia rispetto ad un asse orizzontale per il cardine O: $I_O = \dfrac{1}{3}mL^2$

Applicando la seconda equazione cardinale si ottiene:

$I_o\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{L^4B_o^2}{4R}\dfrac{d\theta}{dt} + mg\dfrac{L}{2}\theta = 0$ che ordinata diviene $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\dfrac{L^4B_o^2}{4RI_o}\right)\dfrac{d\theta}{dt} + \left(\dfrac{mgL}{2I_o}\right)\theta = 0$

L'equazione differenziale ha come soluzione generale la funzione $\theta(t) = A\exp(\alpha t)$. Il valore della costante di tempo α si ottiene risolvendo la seguente equazione caratteristica di secondo grado

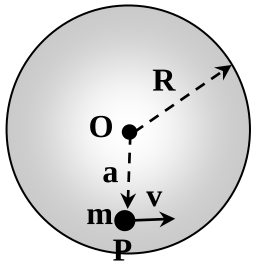
$\alpha^2 + \left(\dfrac{L^4B_o^2}{4RI_o}\right)\alpha + \left(\dfrac{mgL}{2I_o}\right) = 0$ che ammette le due soluzioni $\alpha_{1,2} = -\left(\dfrac{L^4B_o^2}{8RI_o}\right) \pm \sqrt{\left(\dfrac{L^4B_o^2}{8RI_o}\right)^2 - \left(\dfrac{mgL}{2I_o}\right)}$

Al variare del valore di induzione magnetica B_o possono instaurarsi oscillazioni sovrasmorzate, sottosmorzate o con smorzamento critico.

Le oscillazioni scompaiono quando il radicando è positivo o nullo: $\left(\dfrac{L^8B_o^4}{64R^2I_o^2}\right) \geq \left(\dfrac{mgL}{2I_o}\right)$ ossia

$B_o^4 \geq \dfrac{32mgI_oR^2}{L^7} = \dfrac{32}{3}\dfrac{m^2gR^2}{L^5}$ quando il campo di induzione vale $B_o \geq B_{\min} = \sqrt[4]{\dfrac{32}{3}\dfrac{m^2gR^2}{L^5}}$ **=2.13 T**

Integrazione di due esercizi solo ai fini del secondo esonero

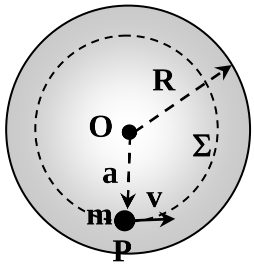


2. Testo. All'interno di una sfera di centro in O e di raggio R=20 cm è distribuita una carica Q=1mC con densità volumetrica non uniforme di legge $\rho(r) = kr^3$ (r è la distanza di un punto generico dal centro O). Una carica puntiforme negativa di carica q= -2μC, di massa m=5g viene lanciata dal punto P (OP=a=15 cm) alla velocità v in modo da poter descrivere un orbita circolare intorno al centro O. Calcolare la velocità orbitale v.
Determinare anche se all'esterno della sfera esista un orbita circolare che viene percorsa alla stessa velocità ed indicare la distanza dal centro O di tale orbita.

2. Soluzione. Calcolo preliminare della costante k

Integrando la densità di carica nella sfera $Q = \int_{sfera} \rho d\tau = \int_0^R (kr^3)(4\pi r^2 dr) = \frac{2}{3} k\pi R^6 \Rightarrow k = \frac{3Q}{2\pi R^6}$

Calcolo del campo elettrico interno alla sfera
Applicando la legge di Gauss ad una sfera passante per P con centro O



$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_o) = 4\pi a^2 E(a) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o} = \frac{\int \rho d\tau}{\varepsilon_o} = \frac{\int_o^a kr^3 (4\pi r^2 dr)}{\varepsilon} = \frac{2}{3} \frac{\pi k a^6}{\varepsilon_o}$$

da cui $E(a) = \frac{ka^4}{6\varepsilon_o} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a^4}{R^6}$

Calcolo della velocità orbitale
la forza di attrazione elettrica è causa della traiettoria circolare del moto orbitale della carica

$F_E = qE = ma_n$ quindi $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a^4}{R^6} = m\frac{v^2}{a}$ da cui $v = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m} \frac{a^5}{R^6}}$ = **65.4 m/s (1)**

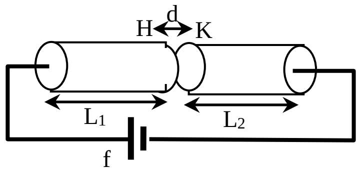
Calcolo di una eventuale orbita esterna percorribile alla stessa velocità orbitale

Applicando il II principio ad una orbita esterna in r=b, si calcola la velocità orbitale come sopra:

$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o b^2} = m\frac{v^2}{b}$ da cui $v = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m b}}$ **(2)**

Eguagliando le Eq.(1) e (2) si ottiene il valore del **raggio dell'orbita esterna** $b = \frac{R^6}{a^5}$ = **84.3 cm**

3. Testo. Un lungo cavo di platino di resistività elettrica $\rho=10^{-7}$ Ωm, sezione $S=10cm^2$ è spezzato in due tronchi di lunghezza L_1=20km, L_2=30km che vengono tenuti insieme da un sottile strato isolante d=1mm. Il cavo è alimentato da una forza elettromotrice f=1kV. Le cariche iniettate dalla fem nella barra di platino si vanno ad accumulare in corrispondenza della frattura come se gli estremi H e K dei due tronconi fossero le armature di un condensatore distanziate da uno spessore di isolante con costante dielettrica ε_r=300. La barra di resistenza R è invece l'elemento che chiude il circuito e permette il processo di carica. Calcolare il tempo caratteristico di carica di questo condensatore, e la carica nel condensatore dopo 10 ns.

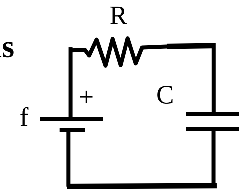


3. Soluzione.
Il circuito fisico indicato nel testo può essere schematizzato con un circuito equivalente a variabili concentrate del tipo RC indicato in figura dove:

la **resistenza elettrica** R complessiva della barra vale per a legge di Ohm $R=\rho\frac{L_1+L_2}{S}$ =**5Ω**

La **capacità del condensatore** piano causato dalla frattura vale $C=\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{S}{d}$ **=2.65 nF**

Il **tempo di carica** del circuito RC vale quindi $\tau_{carica}=RC=\frac{\rho\varepsilon_o\varepsilon_r(L_1+L_2)}{d}$ =**13.3 ns**



La **carica nel condensatore** dopo t*=10ns si ottiene dalla equazione di carica

$q=fC\left[1-\exp\left(-t^*/\tau_{carica}\right)\right]=$ **1.4 μC**