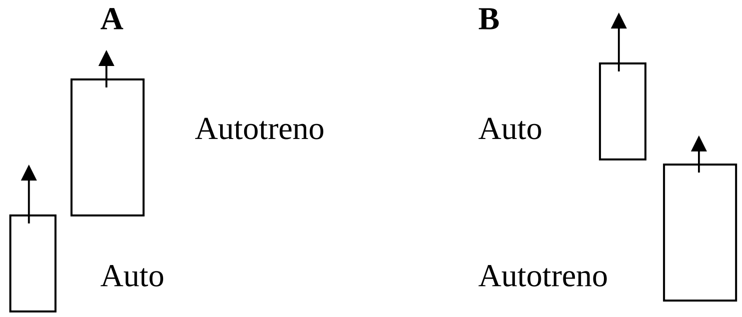
FISICA APPLICATA

A.A. 2016-2017

2°prova – Testo e Soluzioni

PROBLEMI COMPLESSI DI CINEMATICA

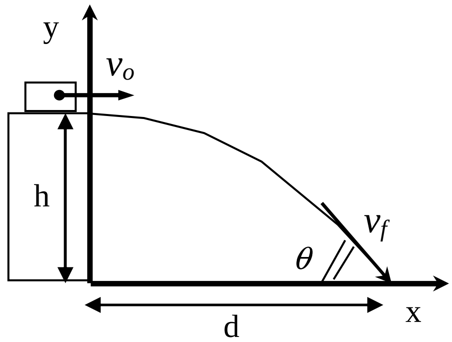
1. Una automobile lunga 4 m viaggia su autostrada. In un tratto rettilineo decide di effettuare il sorpasso di un autotreno con rimorchio lungo 12 m. Si calcoli il tempo di sorpasso supponendo che la macchina viaggi a velocità di 110 Km/h e che l'autotreno viaggi alla velocità di 90 Km/h. Nell'ipotesi invece che il conducente dell'auto voglia accelerare la manovra di sorpasso in modo da impiegare metà tempo, si determini inoltre l'accelerazione da imprimere e la velocità alla fine del sorpasso. (Per tempo di sorpasso si intende il tempo impiegato per passare dalle due posizioni A e B in figura).



1. Il moto degli autoveicoli è rettilineo. Orientiamo l’asse *x* nel verso del moto e studiamo il moto di due punti a scelta dei due autoveicoli come ad esempio i paraurti posteriori. Questi descriveranno nel tempo un moto descritto dalle leggi orarie $x_{auto}(t), x_{Tir}(t)$. Assumendo l’origine nella posizione iniziale del paraurti posteriore della macchina le condizioni iniziali divengono $x_{auto}(0)=0$ e $x_{Tir}(0)=\Delta l_{auto}=4m$. Quando nella prima parte dell’esercizio le due autovetture si muovono con velocità costante, le leggi orarie sono $\begin{cases} x_{auto}(t) = x_{auto}(0) + v_{auto}t \\ x_{Tir}(t) = x_{Tir}(0) + v_{Tir}t \end{cases}$. Il tempo di sorpasso è definito come quel tempo al quale la macchina ha superato completamente il tir e cioè quando il paraurti posteriore dell’auto è allineato con quello anteriore del tir. Questa condizione si esprime in formule $x_{auto}(t_{fin}) - x_{Tir}(t_{fin}) = \Delta l_{Tir} = 12m$. Sostituendo si ha $t_{fin} = \dfrac{\Delta l_{Tir} + \Delta l_{auto}}{v_{auto} - v_{Tir}} = 2.88$ s. Se invece l’auto accelerasse durante il sorpasso il moto diviene $\begin{cases} v_{auto}(t) = v_{auto}(0) + at \\ x_{auto}(t) = x_{auto}(0) + v_{auto}(0)\ \ t + at^2/2 \end{cases}$. Per trovare l’accelerazione necessaria per impiegare un tempo $\tau = t_{fin}/2 = 1.44$ s, si impone la stessa condizione di sorpasso appena vista ottenendo $a = \dfrac{2\left[\left(\Delta l_{Tir} + \Delta l_{auto}\right) - \left(v_{auto} - v_{Tir}\right)\tau\right]}{\tau^2} = 7.71 m/s^2$ e per la velocità finale $v_{auto}(\tau) = v_{auto}(0) + a\tau = 41.66 m/s = 150 Km/h$

2. In un bar, un avventore lancia lungo il banco un boccale vuoto di birra perché venga riempito nuovamente. Il barista, momentaneamente distratto, non vede il boccale che cade al suolo ad una distanza di 1.4 m dalla base del banco. Se l’altezza del banco è di 0.86 m, calcolare (a) la velocità del boccale al momento del distacco dal banco, (b) la direzione della velocità (rispetto all’orizzontale) del boccale nell’istante precedente all’impatto con il suolo.

2. Il moto del boccale è di tipo parabolico. Fissando gli assi x ed y come in figura i due moti componenti sono rispettivamente rettilineo uniforme (x) ed uniformemente accelerato (y)



$$\begin{cases} x(t) = v_o t \\ v_x = v_o \\ a_x = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad \begin{cases} y(t) = h - gt^2/2 \\ v_y(t) = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

Il tempo di volo t^* si ottiene dalla $y(t)$ imponendo $y(t^*)=0$ da cui $t^* = \sqrt{2h/g}$, mentre la distanza d si ottiene dalla $x(t)$ imponendo g $x(t^*) = d = v_o t^*$ dalla quale si ricava la velocità $v_o = d/t^* = d\sqrt{g/2h} = 3.34\,m/s$. Per determinare la velocità finale dobbiamo calcolare le sue componenti al tempo t^* che sono $\begin{cases} v_x = v_o = d\sqrt{g/2h} \\ v_y(t^*) = -gt^* = -\sqrt{2hg} \end{cases}$ (si noti come $v_y<0$ vista l'orientazione dell'asse. L'angolo di caduta è $\theta = arc\tan\left(\frac{|v_{y,\,fin}|}{v_x}\right) = arc\tan\left(\frac{2h}{d}\right) = 0.89\,rad \equiv 50°51'$

3. Un astronauta si trova sulla superficie di un pianeta sconosciuto. Per testare la gravità presente sul pianeta egli spicca una serie di salti tutti alla medesima velocità iniziale V_o=9m/s e con tutte le angolazioni possibili. Sapendo che l'astronauta in queste condizioni riesce a saltare coprendo una distanza orizzontale al massimo di L=30m, determinare il valore dell'accelerazione di gravità su tale pianeta.

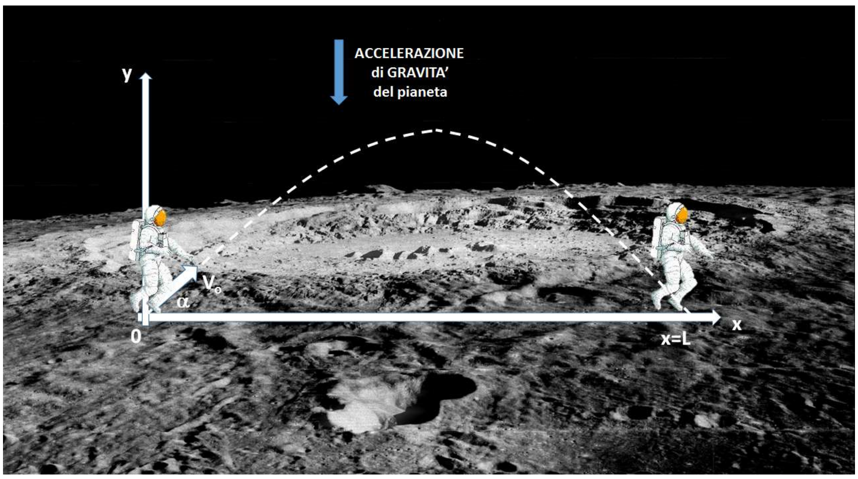
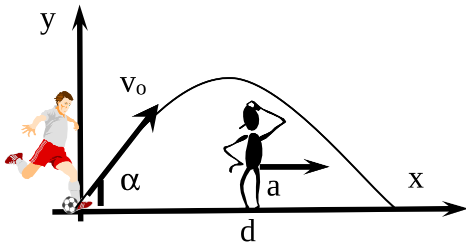


Figura rappresentativa della scena presa durante il salto dell'astronauta

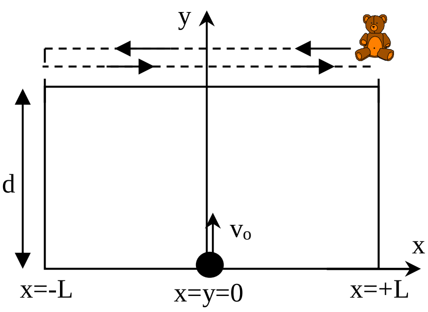
3. Il moto dell'astronauta è un tipico moto parabolico. E' facile dimostrare come la gittata, ossia la distanza fra il punto di partenza ed il punto di atterraggio valga $L(\alpha) = v_o^2 sin(2\alpha)/g_p$ dove g_p è l'accelerazione di gravità del pianeta, $v_o=9m/s$ il modulo della velocità iniziale, α è l'angolo di salto rispetto all'orizzontale. La gittata è ovviamente massima per α=45° e vale $L_{\max} = v_o^2/g_p$ da dove possiamo calcolare l'accelerazione del pianeta $g_p = v_0^2/L_{\max} = \frac{81m^2/s^2}{30m} = 2.7\,m/s^2$

4. Un portiere rimette dal fondo il pallone con una velocità iniziale di $v_o=20m/s$ ed inclinazione di $30°$ rispetto all'orizzontale. A quell'istante un giocatore avversario dista $d=20m$ dalla porta e vede venirsi incontro la palla. Con quale accelerazione, supposta costante, dovrà muoversi tale giocatore per intercettare la palla al volo con il piede?



4. Il moto della palla è parabolico a causa dell'accelerazione di gravità. Le equazioni del moto sono $\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases}$ da cui le velocità $\begin{cases} v_y = v_o sin\alpha - gt \\ v_x = v_o \cos\alpha \end{cases}$ ed i moti componenti $\begin{cases} y_p = v_o t sin\alpha - gt^2/2 \\ x_p = v_o t \cos\alpha \end{cases}$ (la palla all'istante iniziale è nell'origine). Il primo dato importante da scoprire è dove la palla andrà a finire (gittata) e quanto tempo impiega per arrivarci (t_{fin}). L'informazione sul tempo t_{fin} si ricava imponendo y=0 nell'ultima equazione. L'equazione corrispondente di 2° grado ammette due soluzioni $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = t_{fin} = \dfrac{2v_o sin\alpha}{g} = 2.04 \quad s \end{cases}$ di cui è accettabile solo la seconda. La gittata è l'ascissa della palla nell'istante t_{fin} cioè $x_p(t_{fin}) = v_o t_{fin} \cos\alpha = 2v_o^2 sin\alpha \cos\alpha / g = 35.3\,\text{m}$. Il giocatore non appena vede come è stata lanciata la palla in $t=0$, prevedendo di essere scavalcato (d<35.3), si muove immediatamente di conseguenza nella direzione x con velocità iniziale nulla ed accelerazione uniforme a. Il moto del giocatore uniformemente accelerato è descritto da $x_g(t) = d + at^2/2$. Imponendo la coincidenza delle ascisse del giocatore e della palla al tempo t_{fin}, $x_g(t_{fin}) = x_p(t_{fin})$, si ottiene una accelerazione $a = 2\dfrac{x_p(t_{fin}) - d}{t_{fin}^{\;2}} = 7.35\,m/s^2$ troppo elevata anche per i migliori atleti.

5. Un gioco al Luna Park consiste nel colpire un bersaglio mobile con un disco cilindrico strisciante su un piano orizzontale xy. Assumendo che il bersaglio si muova secondo la legge del moto armonico $x(t) = L\cos(\omega t)$ e che il disco venga lanciato con velocità v_o lungo la linea diretta lungo l'asse y, si determini in quale istante t_o bisogna lanciare il disco per colpire il bersaglio al primo passaggio. Fornire anche la posizione del bersaglio nel momento del lancio. [Dati: periodo del moto armonico T=10s, L=50cm, d=40cm, v_o=2m/s].



5. Un gioco al Luna Park consiste nel colpire un bersaglio mobile con un disco cilindrico strisciante su un piano orizzontale xy. Assumendo che il bersaglio si muova con legge oraria $x(t) = L\cos(\omega t)$ e che il disco venga lanciato con velocità v_o lungo la linea diretta lungo l'asse y, si determini in quale istante t_o bisogna lanciare il disco per colpire il bersaglio al primo passaggio. Fornire anche la posizione del bersaglio nel momento del lancio. [Dati: periodo del moto armonico T=10s, L=50cm, d=40cm, v_o=2m/s]. **Facoltativo:** ripetere l'esercizio assumendo che il moto del disco venga rallentato per effetto dell'attrito [μ_d=0.2]

Equazioni del moto del bersaglio

$$\begin{cases} x_1(t) = L\cos\left(2\pi \dfrac{t}{T}\right) \\ y_1 = d \end{cases}$$

Equazioni del moto del disco cilindrico

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2(t) = v_o(t - t_o) \quad t \geq t_o \end{cases}$$

Il bersaglio viene colpito al tempo t* quando sono soddisfatte le relazioni

$$\begin{cases} x_1(t^*) = x_2 \\ y_2(t^*) = y_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L\cos\left(2\pi \dfrac{t^*}{T}\right) = 0 \\ v_o(t^* - t_o) = d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t^* = T/4 \\ t_o = t^* - d/v_o \end{cases} \text{ quindi } \; t_o = T/4 - d/v_o = \mathbf{2.3\ s}$$

All'istante di lancio t_o il bersaglio era nella posizione

$$\begin{cases} x_1(t_o) = L\cos\left(2\pi \dfrac{t_o}{T}\right) = 6.3\text{cm} \\ y_1 = d = 40\text{cm} \end{cases}$$