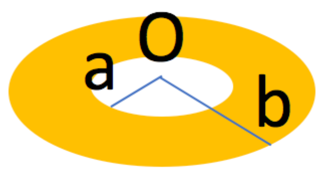
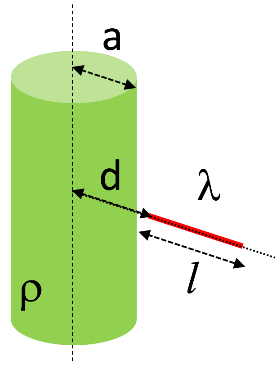
3° ESERCITAZIONE – mercoledì 10 ottobre 2018 (e altri esercizi di elettrostatica)

1) Un segmento di lunghezza a = 6 cm è uniformemente carico con densità λ = +1,4 μC/m. A distanza 2d = 2 cm da una estremità è posta una carica puntiforme +Q.

Determinare il valore di Q sapendo che nel punto P a metà distanza fra l'estremità del filo e la carica il campo elettrico è nullo.
>>> soluzione: Q = 12 nC



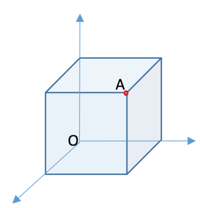
2) Una carica positiva è distribuita nel vuoto su una corona circolare di raggio interno a ed esterno b, con densità superficiale $\sigma = kr^2$, dove r è la distanza dal centro e k è una costante.
Ricavare l'espressione del potenziale V(0) nel centro della distribuzione nell'ipotesi V(∞) = 0.
>>> soluzione: $k(b^3-a^3)/6\varepsilon_0$



3) Nel vuoto sono presenti due distribuzioni uniformi di carica statica. Una, con densità di carica ρ = 2 nC/m^3, è distribuita all'interno di un cilindro indefinito di raggio a = 5 cm. L'altra, con densità di carica λ = -3 nC/m, è distribuita lungo un segmento di lunghezza l = 17,2 cm posto, come in figura, a distanza d = 10 cm dall'asse del cilindro.
Determinare la forza che si esercita fra le due distribuzioni di carica.
>>> soluzione: 0,85 nN (attrattiva)

4) Due piani paralleli indefiniti uniformemente carichi con densità σ_1 = + 0,89 nC/m^2 e $\sigma_2 = -\frac{1}{2}\sigma_1$ sono posti a distanza d = 1 cm. Determinare la differenza di potenziale fra i due piani.
>>> soluzione: V_2-V_1 = -0,75 V

5) Graficare gli andamenti della densità di carica, della componente x del campo elettrico e del potenziale originati da uno strato piano di carica uniformemente distribuito con densità ρ fra il piano di coordinate x = -d/2 e quello di coordinate x = +d/2. Quanto vale la differenza di potenziale fra le due superficie che delimitano la carica elettrica?
{sugg. utilizzare il teorema di Gauss scegliendo un cilindro con basi parallele allo strato di carica ed equidistanti dal piano x = 0}
>>> soluzione: ΔV = 0 V



6) Nello spazio è presente un campo elettrico $\mathbf{E} = c\, z^3\, \mathbf{k}$ con c = 10 MV/m^4.
Facendo riferimento alla figura determinare la carica elettrica presente nel cubo di lato d = 5 cm e la differenza di potenziale fra i punti O e A.
>>> soluzione: Q = 28 pC; V_A-V_O = -15,6V

7) Determinare il lavoro che occorre compiere per spostare una carica q = 1 μC dall'asse di un dipolo di momento p = 10^{-16} Cm a una posizione in direzione perpendicolare a tale asse; il tutto mantenendo costante la distanza R = 3 cm dal dipolo.
>>> soluzione: L = -1 nJ

8) Una carica elettrica è distribuita in una regione cilindrica di altezza infinita e raggio R con densità di volume $\rho(r)= k/r$ con r distanza dall'asse. Determinare l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio
>>> soluzione: $r<R$: $E = k/\varepsilon_0$; $r>R$: $E = kR/(r\varepsilon_0)$

9) Una carica elettrica nel vuoto è uniformemente distribuita su i piani di coordinate x = 0 (con densità di carica $-\sigma$) e x = d (con densità di carica 4σ). Determinare l'espressione del potenziale per x > 0 assumendo V(0) = 0 e disegnare qualitativamente l'andamento V(x) per ogni x.
>>> soluzione: $V(x>0) = -3/2\ \sigma x/\varepsilon_0$

10) Si consideri una carica –Q uniformemente distribuita in una sfera di raggio R al cui centro è posta una carica puntiforme +Q. Determinare l'andamento del potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro della sfera assumendolo nullo a grande distanza.
>>> soluzione: $V(r>R) = 0$; $V(r<R) = 1/(4\pi\varepsilon_0)\ [1/r-1/R+(r^2-R^2)/2R^3]$

11) Una carica elettrica è distribuita all'interno di un guscio sferico di raggi a e b con densità di volume $\rho = k/r$ dipendente da r, distanza dal centro del guscio. Determinare l'intensità del campo elettrico sulle due superfici del guscio. Quale carica puntiforme Q andrebbe posta nel centro della distribuzione per avere E(a) = E(b)?
>>> soluzione: 0, $\frac{k(b^2-a^2)}{2\varepsilon_0 b^2}$, $Q=2\pi k\, a^2$

12) Il modello di Thomson dell'atomo di idrogeno prevedeva che la carica positiva +e fosse uniformemente all'interno di una sfera di raggio R. Determinare il moto di un elettrone (carica –e, massa m) inizialmente fermo sulla superficie della sfera.
>>> soluzione: moto armonico $\omega^2 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m R^3)$

13) Un elettrone ($m = 9\ 10^{-31}$ kg, $q = -e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C) viene lanciato con velocità $v_0 = 3\ 10^6$ m/s verso il centro di un disco isolante sottile di raggio R = 1 cm uniformemente carico (Q = -1 nC) posto nel vuoto. Inizialmente l'elettrone si trova sull'asse del disco a grande distanza da esso. Qual è la minima distanza dal disco alla quale può arrivare l'elettrone?
{a seconda del procedimento può essere utile ricordare che a distanza z sull'asse di un disco posto nell'origine uniformemente carico si hanno $E_z(z)=(\sigma/2\varepsilon_0)[1-z/(R^2+z^2)^{1/2}]$ e $V(z)=(\sigma/2\varepsilon_0)[(R^2+z^2)^{1/2}-z]$}
{sugg. essendo R << z nei calcoli utilizzare Maclaurin}
>>> soluzione: circa 36 cm

1) $Q = \lambda\ ad/(a+d)$

3) $F = (a^2\rho\lambda)/(2\varepsilon_0)\ \ln[(d+l)/d]$

5) $Ex_{MAX} = \rho d/2\varepsilon_0$; $V(x) = -\frac{1}{2}\rho\, x^2$

6) $Q = cd^5\varepsilon_0$; $V_A-V_O = -c/4\ d^4$

7) $L = -pq/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$

8) $r<R$: $2\pi r\, h\, E = 1/\varepsilon_0 \int_0^r \frac{k}{r} h\, 2\pi r\, dr$ $r>R$: $2\pi r\, h\, E = 1/\varepsilon_0 \int_0^R \frac{k}{r} h\, 2\pi r\, dr$

10) $r<R \rightarrow E = 1/4\pi\varepsilon_0\, Q(1/r^2 - r/R^3)$; $r>R \rightarrow E = 0$

12) calcolare $\mathbf{E}(r)$; $m\mathbf{a} = q\mathbf{E}$

ULTERIORI SUGGERIMENTI

1) $\int_0^a \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a+d-x)^2} = 1/4\pi\varepsilon_0\, Q/d^2$

3) Gauss: $2\pi rh\, E(r) = \pi a^2 h\, \rho/\varepsilon_0 \rightarrow E(r) = (a^2\rho)/(2\varepsilon_0\, r)$ $dF = E(r)\, \lambda dr$ da integrare da d a d+l

6) I Maxwell $\rightarrow \rho(r) = \rho(z)$

7) $U(\theta) = qV(\theta) = pq\cos\theta/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$

13) $E_{tot} = K + U$