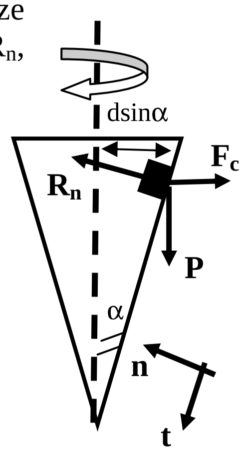
FISICA

A.A. 2012-2013
Ingegneria Gestionale
Soluzioni del 3° appello

1. Quando il punto materiale raggiunge l'equilibrio la risultante delle forze agenti si annulla. Proiettando la forza centrifuga F_c, la reazione normale R_n, la forza peso P secondo gli assi t,n, si ottiene



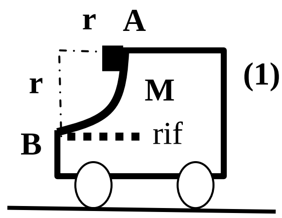
$$\begin{aligned} n)&\begin{cases} R_n - P\sin\alpha - F_c\cos\alpha = 0 \\ \end{cases}\\ t)&\begin{cases} P\cos\alpha - F_c\sin\alpha = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Dalla seconda si ottiene la forza centrifuga $F_c = m\omega^2 d\sin\alpha = \dfrac{mg}{tg\alpha}$

da cui $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{d}\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}$ ed infine il periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{g}\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}$ = **0.763 s**

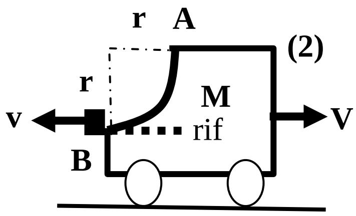
2. Determinazione del moto del carrello
In assenza di attriti le forze responsabili del moto del carrello sono le reazioni vincolari interne tra la massa ed il carrello, con conseguente **conservazione della quantità di moto del sistema** tra la posizione iniziale (1) e quella finale (2)

$p^{(1)} = p^{(2)} \qquad 0 = MV - mv$ da cui $mv = MV$



In assenza di attriti si ha anche la **conservazione dell'energia** tra la posizione iniziale (1) e quella finale (2)

$U^{(1)} + T^{(1)} = U^{(2)} + T^{(2)}$ ossia $mgr = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2$



Combinando le equazioni si ottengono le velocità della massa m e del carrello

Velocità della massa m in B: $v = \sqrt{2gr}\sqrt{1+\dfrac{m}{M}}$ = **3.28 m/s**

Velocità a regime del carrello: $V = \left(\dfrac{m}{M}\right)\sqrt{2gr}\sqrt{1+\dfrac{m}{M}}$ = **0.328 m/s**

3 La quantità di calore necessaria per sciogliere una quantità *m* di ghiaccio alla temperatura T_o=0°C=273.15 K si ottiene dal prodotto $Q_1 = m \cdot q_f$ = **33.5 kJ**

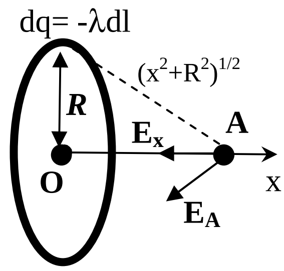
Il gas subisce una trasformazione isoterma cedendo una quantità di calore alla massa di ghiaccio

$Q_2 = L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = NRT_o \int_{V_1}^{V_2} \dfrac{dV}{V} = NRT_o \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) < 0$ (il segno negativo indica cessione di calore)

Imponendo $Q_1 + Q_2 = 0$ che il calore ceduto dal gas sia assorbito per la fusione del ghiaccio

$NRT_o \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) + mq_f = 0$ da cui il **volume finale del gas** $V_2 = V_1 \exp\left[-\dfrac{mq_f}{NRT_o}\right]$ = **0.957 m³**

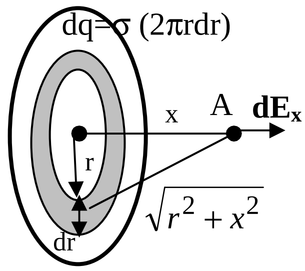
4. Campo elettrico prodotto da un anello uniformemente carico.
Il campo elettrico E_A prodotto dalla carica dq disposta su un elemento dell'anello



$$dE_A^{(1)} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)}$$ che ha proiezione utile $$dE_x^{(1)} = \frac{dq\cdot x}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Integrando tutti i contributi si ottiene il campo complessivo $E_x^{(1)} = \dfrac{-\lambda\cdot x\cdot R}{2\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$

(il segno meno indica che il campo elettrico è diretto verso il centro O)



Campo elettrico prodotto da un disco uniformemente carico.

Il campo elettrico prodotto da un anello infinitesimo di raggio *r* e spessore *dr* sul quale è disposta la carica dq=σ(2πrdr) è dato dalla formula

$$dE_x^{(2)} = \frac{dq\cdot x}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma\cdot x\cdot r\cdot dr}{2\varepsilon_o\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$ che deve essere integrato su tutto il disco

$$E_x^{(2)} = \int_0^R dE_x^{(2)} = \int_0^R \frac{\sigma\cdot x\cdot r\cdot dr}{2\varepsilon_o\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

Imponendo l'annullamento del campo complessivo in A (x=D) si ottiene la relazione

$$\frac{\lambda\cdot D\cdot R}{2\varepsilon_o\left(D^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{D}{\sqrt{D^2+R^2}}\right]$$ da cui $$\lambda = \sigma\left[\frac{\left(D^2+R^2\right)^{3/2}}{D\cdot R} - \frac{D^2+R^2}{R}\right]$$ = **20.8 μC/m**

Facoltativo: La differenza di potenziale dovuta al solo anello negativo vale

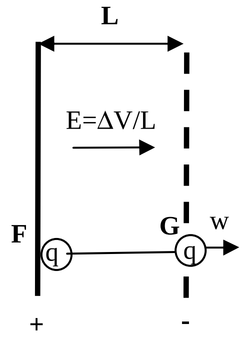
$$V_O^{(1)} - V_A^{(1)} = \int_0^D E_x^{(1)}dx = \frac{-\lambda}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{R}{\sqrt{D^2+R^2}}\right]$$ = **- 0.47·10^6 V**

La differenza di potenziale dovuta al solo disco positivo vale

$$V_O^{(2)} - V_A^{(2)} = \int_0^D E_x^{(2)}dx = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\left[D+R-\sqrt{D^2+R^2}\right]$$ = **1.13·10^6 V**

La differenza potenziale dovuta ad entrambe le distribuzioni vale $V_O^{tot} - V_A^{tot}$ = **0.66·10^6 V**

5. Moto della carica nel tratto FG



La carica viene accelerata uniformemente dal campo E=ΔV/L

L'accelerazione $a = \frac{q}{m} E = \left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{\Delta V}{L}\right)$

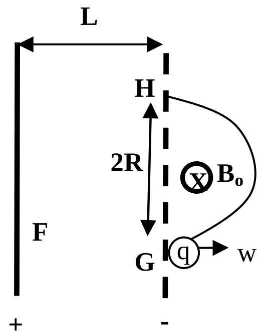
La velocità si ottiene integrando $w = at = \left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{\Delta V}{L}\right) \cdot t$

Lo spazio percorso $x(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{\Delta V}{L}\right) \cdot \frac{t^2}{2}$

Il tempo di percorrenza di FG si ottiene imponendo $x(t) = L$

da cui $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = L\sqrt{\left(\frac{m}{q}\right)\frac{2}{\Delta V}} =$ **1.41 ns**

Moto della carica nel tratto GH



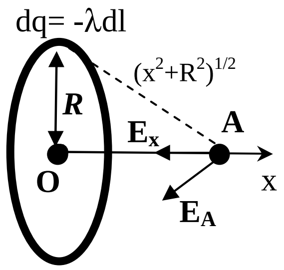
La carica è soggetta alla forza di Lorentz che fornisce una accelerazione centripeta $a_n = \left(\frac{q}{m}\right) w B_o = \frac{w^2}{R}$ La carica si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega = \frac{w}{R} = \left(\frac{q}{m}\right) B_o$

Il tempo di percorrenze della semicirconferenza GH

è metà del periodo $t_2 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \left(\frac{m}{q}\right)\frac{\pi}{B_o} =$ **3.14 ns**

FISICA

A.A. 2012-2013
Ingegneria Gestionale
SECONDO ESONERO
Soluzioni del 3° appello

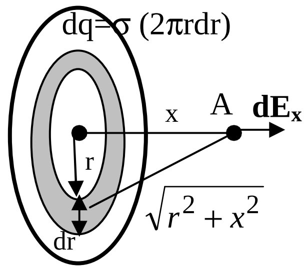


1. Campo elettrico prodotto da un anello uniformemente carico.
Il campo elettrico E_A prodotto dalla carica dq disposta su un elemento dell'anello

$$dE_A^{(1)} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)} \quad \text{che ha proiezione utile} \quad dE_x^{(1)} = \frac{dq\cdot x}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Integrando tutti i contributi si ottiene il campo complessivo $E_x^{(1)} = \dfrac{-\lambda\cdot x\cdot R}{2\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$

(il segno meno indica che il campo elettrico è diretto verso il centro O)



Campo elettrico prodotto da un disco uniformemente carico.

Il campo elettrico prodotto da un anello infinitesimo di raggio *r* e spessore *dr* sul quale è disposta la carica dq=σ(2πrdr) è dato dalla formula

$$dE_x^{(2)} = \frac{dq\cdot x}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma\cdot x\cdot r\cdot dr}{2\varepsilon_o\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$ che deve essere integrato su tutto il disco

$$E_x^{(2)} = \int_0^R dE_x^{(2)} = \int_0^R \frac{\sigma\cdot x\cdot r\cdot dr}{2\varepsilon_o\left(x^2+r^2\right)^{3/2}} = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

Imponendo l'annullamento del campo complessivo in A (x=D) si ottiene la relazione

$$\frac{\lambda\cdot D\cdot R}{2\varepsilon_o\left(D^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{D}{\sqrt{D^2+R^2}}\right] \quad \text{da cui} \quad \lambda = \sigma\left[\frac{\left(D^2+R^2\right)^{3/2}}{D\cdot R} - \frac{D^2+R^2}{R}\right] = \mathbf{20.8\ \mu C/m}$$

Facoltativo: La differenza di potenziale dovuta al solo anello negativo vale

$$V_O^{(1)} - V_A^{(1)} = \int_0^D E_x^{(1)}dx = \frac{-\lambda}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{R}{\sqrt{D^2+R^2}}\right] = \mathbf{-\ 0.47\cdot 10^6\ V}$$

La differenza di potenziale dovuta al solo disco positivo vale

$$V_O^{(2)} - V_A^{(2)} = \int_0^D E_x^{(2)}dx = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_o}\left[D+R-\sqrt{D^2+R^2}\right] = \mathbf{1.13\cdot 10^6\ V}$$

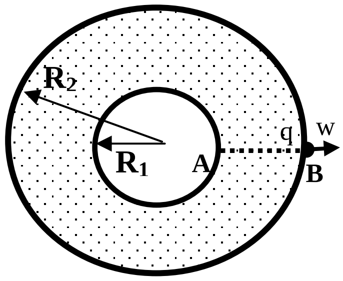
La differenza potenziale dovuta ad entrambe le distribuzioni vale $V_O^{tot} - V_A^{tot} =$ $\mathbf{0.66\cdot 10^6\ V}$

2. Calcolo del campo elettrico

Applicando la legge di Gauss ad una superficie sferica concentrica Σ

$$\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r) = Q_{int}/\varepsilon_o \quad \text{dove } Q_{int} = \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & 4\pi\rho\left(r^3 - R_1^3\right)/3 \\ r > R_2 & 4\pi\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)/3 \end{cases}$$

$$\text{da cui } E = \begin{cases} r < R_1 & 0 \\ R_1 < r < R_2 & \rho\left(r - R_1^3/r^2\right)/3\varepsilon_o \\ r > R_2 & \rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)/3\varepsilon_o r^2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ Q\left(r - R_1^3/r^2\right)/4\pi\varepsilon_o\left(R_2^3 - R_1^3\right) \\ Q/4\pi\varepsilon_o r^2 \end{cases}$$



La differenza di potenziale tra i punti A,B estremi del tragitto si calcola come

$$V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o\left(R_2^3 - R_1^3\right)} \int_{R_1}^{R_2} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right) dr =$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} - R_1^2\right)\right] = \mathbf{2.02\ 10^8\ V}$$

Ipotizzando che la carica q sia inizialmente ferma in A ed imponendo la conservazione dell'energia tra il punto di partenza A e quello di arrivo B si ottiene per la velocità in B

$$qV_A = qV_B + T_B \quad \text{da cui} \quad w_B = \sqrt{\frac{2q\left(V_A - V_B\right)}{m}} = \mathbf{201\ \ m/s}$$

3 La quantità di calore necessaria per sciogliere una quantità m di ghiaccio alla temperatura T_o=0°C=273.15 K si ottiene dal prodotto $Q_1 = m \cdot q_f$ **= 33.5 kJ**

Il gas subisce una trasformazione isoterma cedendo una quantità di calore alla massa di ghiaccio

$$Q_2 = L = \int_{V_1}^{V_2} p dV = NRT_o \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = NRT_o \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0 \quad \text{(il segno negativo indica cessione di calore)}$$

Imponendo $Q_1 + Q_2 = 0$ che il calore ceduto dal gas sia assorbito per la fusione del ghiaccio

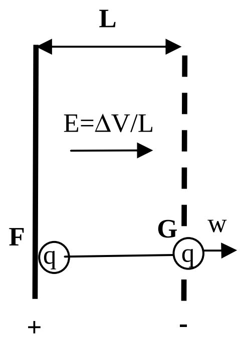
$$NRT_o \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + mq_f = 0 \quad \text{da cui il } \textbf{volume finale del gas} \quad V_2 = V_1 \exp\left[-\frac{mq_f}{NRT_o}\right] = \mathbf{0.957\ m^3}$$

4. Moto della carica nel tratto FG

La carica viene accelerata uniformemente dal campo E=ΔV/L

L'accelerazione $a = \dfrac{q}{m}E = \left(\dfrac{q}{m}\right)\left(\dfrac{\Delta V}{L}\right)$

La velocità si ottiene integrando $w = at = \left(\dfrac{q}{m}\right)\left(\dfrac{\Delta V}{L}\right) \cdot t$

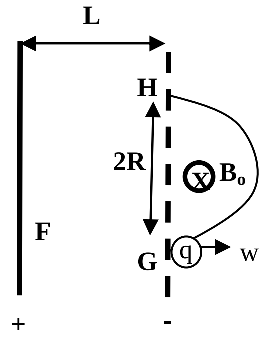


Lo spazio percorso $x(t)=\frac{1}{2}at^2=\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{\Delta V}{L}\right)\cdot\frac{t^2}{2}$

Il tempo di percorrenza di FG si ottiene imponendo $x(t)=L$

da cui $t_1=\sqrt{\frac{2L}{a}}=L\sqrt{\left(\frac{m}{q}\right)\frac{2}{\Delta V}}=$ **1.41 ns**

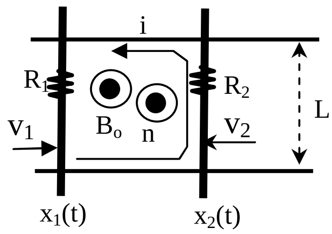
Moto della carica nel tratto GH



La carica è soggetta alla forza di Lorentz che fornisce una accelerazione centripeta $a_n=\left(\frac{q}{m}\right)wB_o=\frac{w^2}{R}$ La carica si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega=\frac{w}{R}=\left(\frac{q}{m}\right)B_o$

Il tempo di percorrenze della semicirconferenza GH

è metà del periodo $t_2=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}=\left(\frac{m}{q}\right)\frac{\pi}{B_o}=$ **3.14 ns**



5. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira rettangolare in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_O$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:

$\Phi_c=\int\vec{B}_o\cdot\hat{n}dS=\int B_o dS=B_o L[x_2(t)-x_1(t)]$.

Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira

$$f_i=-\frac{d\Phi_c}{dt}=-B_o L(v_{2x}-v_{1x})=B_o L(v_2+v_1)=\textbf{3mV}$$

ed infine l'intensità di corrente indotta nel circuito

$i=\frac{B_o L(v_2+v_1)}{R_1+R_2}=$ **300 μA** (circolante nel senso riportato in figura)