# FISICA

A.A. 2017-2018
Ingegneria Gestionale
*3° appello del 20 Settembre 2018*
**Esame completo**

**1.** Una massa m=0.2 kg è lanciata verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $v_o$=2m/s. Determinare dopo quanto tempo raggiungerà l'altezza massima sapendo che, durante il percorso di salita della massa la forza viscosa esercitata dall'aria esprimibile con legge $R_v$=bv con b=4kg/s. **Facoltativo:** determinare l'altezza massima raggiunta.

**1.** La massa lanciata verso l'alto si muove sotto l'effetto di due forze entrambe rivolte verso il basso: la forza peso e la reazione del mezzo alla velocità

$-mg - bv_y = ma_y = m\dfrac{dv_y}{dt}$ da cui si ricava l'eq. differenziale $\dfrac{dv_y}{v_y + \left(\dfrac{mg}{b}\right)} = -\left(\dfrac{b}{m}\right)dt$

che integrata nell'intervallo [0,t] cui corrispondono i valori di velocità $[v_o, v_y(t)]$

$\displaystyle\int_{v_o}^{v(t)} \frac{dv_y}{v_y + \left(\frac{mg}{b}\right)} = \ln\left[\frac{v_y(t) + mg/b}{v_o + mg/b}\right] = -\left(\frac{b}{m}\right)t$ con soluzione

$$v_y(t) = -\left(\frac{mg}{b}\right) + \left(v_o + \frac{mg}{b}\right)\exp\left[-\left(\frac{b}{m}\right)t\right]$$

Dalla teoria si ricava che la velocità limite asintotica è espressa come $v_{\lim} = \dfrac{mg}{b}$ =**0.49 m/s**

Sostituendo questa espressione nella precedente soluzione si ottiene

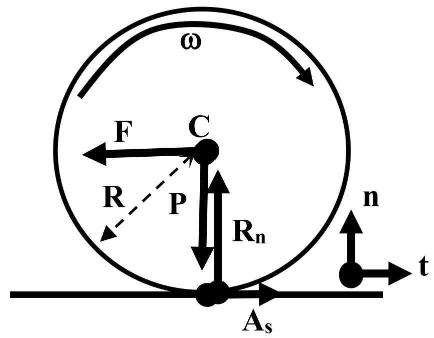
$v_y(t) = -v_{\lim} + (v_o + v_{\lim})\exp\left[-\dfrac{gt}{v_{\lim}}\right]$ che si annulla al tempo $t = \dfrac{v_{\lim}}{g}\ln\left(1 + \dfrac{v_o}{v_{\lim}}\right) = \mathbf{81\ ms}$

**Facoltativo:** Lo spazio percorso si ottiene per integrazione $y(t) = y_o + \displaystyle\int_{to}^{t} v(t)dt$

$y(t) = -v_{\lim}t + (v_o + v_{\lim})\dfrac{v_{\lim}}{g}\left\{1 - \exp\left[-\dfrac{gt}{v_{\lim}}\right]\right\}$ che dopo **81ms** porta alla quota massima **h=6.02 cm**

**2.** Una ruota omogenea di massa M=3kg rotola liberamente senza strisciare su un piano orizzontale con attrito $\mu_s$=0.5. Sapendo che la ruota rotola liberamente sul piano con una velocità costante del centro di massa $v_c$=0.5 m/s determinare la massima forza frenante $F_{max}$ che può essere applicata al centro di massa, in senso contrario al moto, senza causare lo slittamento della ruota e calcolare in quale tempo la ruota si ferma a partire applicazione di $F_{max}$.

**2. Rotolamento della ruota durante la frenata:** il moto di rotolamento è predetto dalle due equazioni cardinali




**1ª Equazione cardinale** $\begin{array}{c} n \\ t \end{array}\begin{cases} R_n = P \\ -F + A_s = ma \end{cases}$

**2ª Equazione cardinale:** calcolo dei momenti rispetto a C

$$M_P + M_F + M_{Rn} + M_{As} = M_{As} = -A_s R = I_C \frac{d\omega}{dt}$$

(l'attrito statico tende a far diminuire la velocità angolare)

da cui $A_S = -\frac{I_C}{R}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{I_C}{R^2}a$ dove per il rotolamento vale la condizione $a = \frac{d\omega}{dt}R$

Combinando le equazioni $-F - \frac{I_C}{R^2}a = ma$ da cui $a = -\frac{F}{m + I_C/R^2}$

(a<0 perchè la ruota decelera)

L'attrito statico deve essere $A_S = -\frac{I_C}{R^2}a = \frac{I_C}{mR^2 + I_C}F \le A_{\max} = \mu_s R_n = \mu_s mg$

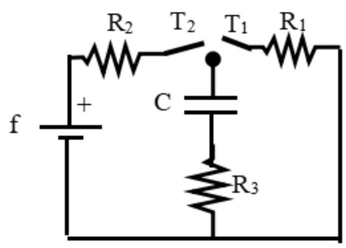
$F \le F_{\max} = \mu_s mg\left(1 + \frac{mR^2}{I_C}\right) = 3\mu_s mg = \mathbf{44.1}$ N ove per un cilindro pieno $I_C = \frac{1}{2}mR^2$

L'accelerazione del centro di massa diviene $a = -\frac{F_{\max}}{m + I_C/R^2} =$ **- 9.8 m/s²**

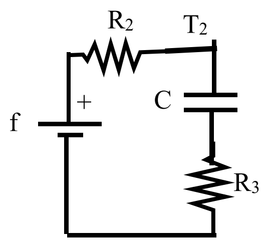
La velocità del centro di massa è quindi $V(t) = V_0 + a \cdot t$ **(dove a<0)**

da cui si ricava il tempo di arresto **t=51 ms**

**3.** Il condensatore C è inizialmente scarico. Nell'istante t=0 viene chiuso il solo tasto $T_2$ in modo che il condensatore possa caricarsi tramite la f.e.m. f=10V. Dopo un tempo $t_1$=10ms vengono azionati contemporaneamente gli interruttori $T_1$ (da aperto a chiuso) e $T_2$ (da chiuso ad aperto) così da poter scaricare il condensatore. Determinare quanto tempo occorre per scaricare il condensatore al 10% del livello di potenziale di f. [**Dati**: $R_1$=25kΩ, $R_2$=15kΩ, $R_3$=25kΩ, C=1μF ]




**3. Primo processo di carica**




La resistenza di maglia è $R_{tot1} = R_2 + R_3 = 40$ kΩ

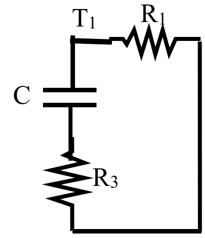
Il tempo caratteristico di carica $\tau_1 = R_{tot1}C =$ **40 ms**

La carica ai capi del condensatore dopo $t_1$ è quindi $q(t_1) = fC[1 - \exp(-t_1/\tau_1)]$

**Secondo processo di scarica**

La resistenza di maglia è $R_{tot\,2} = R_1 + R_3 = 50\ \mathrm{k\Omega}$

Il tempo di scarica $\tau_2 = R_{tot\,2}C =$ **50 ms**




A partire dal nuovo tempo t>0, ai capi del condensatore si registra un processo di scarica della carica pre-esistente

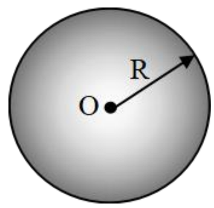
$q(t) = fC[1-\exp(-t_1/\tau_1)]\exp[-t/\tau_2]$

La corrispondente tensione sul condensatore si abbassa al livello 0.1 f al tempo

$\Delta V = f[1-\exp(-t_1/\tau_1)]\exp[-t/\tau_2]$ = 0.1 f

da cui $t = \tau_2 \ln\left(\dfrac{1-\exp[-t_1/\tau_1]}{0.1}\right) =$ **111 ms**

**4.** Sia dato un cilindro di lunghezza indefinita di centro in O e di raggio R disposto nel vuoto. All'interno del cilindro sia distribuita una carica con densità volumetrica non uniforme in accordo alla legge $\rho=Ar^2+Br$ dove r rappresenta la distanza del generico punto dall'asse centrale centro O. Calcolare il valore della differenza di potenziale fra il centro e la superficie [Dati: R=1m, $A=10\mu C/m^5$, $B=5\mu C/m^4$]

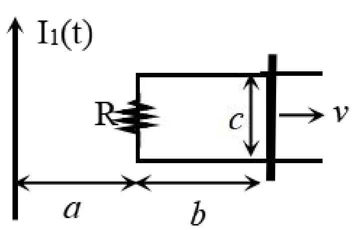



**4.** Si applica la legge di Gauss ad un cilindro di raggio r<R ed altezza h. Il flusso uscente da Σ vale $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 2\pi r h \cdot E_o(r)$ che per Gauss deve valere $Q_{int}/\varepsilon_o$, dove il valore della carica interna alla superficie Σ vale $Q_{\text{int}} = \int \rho dV = \int_0^r \rho(2\pi r h dr) = 2\pi h \int_0^r (Ar^3 + Br^2)dr = 2\pi h\left(\dfrac{Ar^4}{4} + \dfrac{Br^3}{3}\right)$

Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{\text{int}} = \left(\dfrac{Ar^3}{4\varepsilon_o} + \dfrac{Br^2}{3\varepsilon_o}\right)$.

$V_o - V_{\text{sup}} = \int_0^R E_o dr = \dfrac{AR^4}{16\varepsilon_o} + \dfrac{BR^3}{9\varepsilon_o} =$ **133 kV**

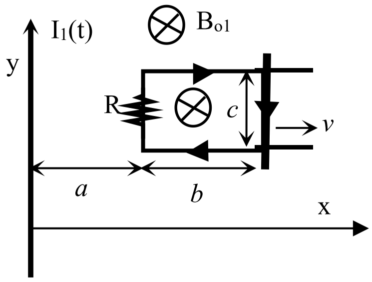
**5.** Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1=I_o*[1-(t/\tau)^3]$. Una spira rettangolare di lati *a,b* giace con il filo nel piano del foglio. Sapendo che il lato più esterno della spira viene spostato alla velocità costante ed assumendo nota la resistenza elettrica R della spira, calcolare il valore della corrente indotta dopo t=τ. [Dati: τ=10ms, $I_o$=2mA, a=b=c=1cm, v=5m/s, R=20Ω]




**5.** Il campo magnetico non uniforme generato dal filo è $B_{o1}(x,t) = \dfrac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$.

Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata (la normale alla spira $\hat{n}$ ha lo stesso verso di $\vec{B}_{o1}$) si ricava il flusso concatenato:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_{o1} \cdot \hat{n} dS = \int B_{o1} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \int_o^c dy \int_a^{a+b(t)} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t) c}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b(t)}{a}\right).$$




la **forza elettromotrice indotta nella spira**

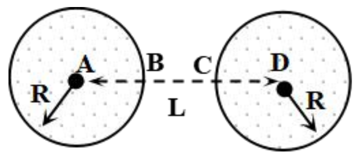
$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o c}{2\pi}\left[\frac{dI_1}{dt}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right) + I_1 \frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right)\right] =$$

$$i(t=\tau) = -\frac{\mu_o c}{2\pi R}\left[\frac{dI_1}{dt}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right)\right] = \frac{\mu_o c I_o}{2\pi R}\left(\frac{3t^2}{\tau^3}\right)\ln\left(1+\frac{b+vt}{a}\right)$$ =**58 pA**

(nel senso indicato in figura)

## ESERCIZI AGGIUNTIVI PER ESONERO

**1.** Due cilindri paralleli infinitamente lunghi e disposti alla distanza L=2m hanno densità di carica opposta **ρ** e **–ρ** uniformemente distribuita nel volume. Conoscendo il raggio dei due cilindri R=50cm, e la differenza di potenziale fra le due superfici dei cilindri $V_A$-$V_D$=100V calcolare la densità di carica **ρ.**




**1. Campo elettrico generato da un cilindro infinitamente lungo uniformemente carico con densità di carica volumetrica** ρ

Applicando la legge di Gauss si calcola il campo elettrico dentro e fuori un cilindro infinitamente lungo
$$\begin{cases} E_{\text{int}} = \rho r / 2\varepsilon_o & r < R \\ E_{ext} = \rho R^2 / 2\varepsilon_o r & r \geq R \end{cases}$$

Integrando il campo elettrico si ottiene la differenza di potenziale
$$V_A - V_D = \int_0^R E_{\text{int}} dr + \int_R^L E_{ext} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{L}{R}\right)\right)$$

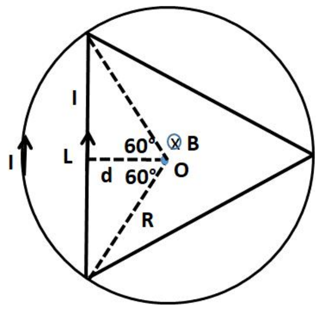
Sommando il contributo del secondo cilindro carico negativamente
$$(V_A - V_D)_{2clindri} = 2(V_A - V_D) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{L}{R}\right)\right)$$

$$\rho = \frac{(V_A - V_D)\varepsilon_o}{R^2\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{L}{R}\right)\right)} = 1.87 nC/m^3$$

**4.** Una spira avente forma di triangolo equilatero di lato L=20cm è percorsa dalla corrente I=2A. Determinare il vettore di induzione magnetica nel punto centrale della spira.

**Facoltativo:** Calcolare a parità di corrente la diminuzione percentuale di induzione magnetica che si osserverebbe nel centro qualora la stessa corrente circolasse su di una circonferenza circoscritta al triangolo equilatero

**4. Induzione magnetica generata da un lato del triangolo equilatero**




Il contributo di induzione magnetica di un tratto rettilineo è

$$B_o^{filo} = \int dB_o^{filo} = \frac{\mu_o I}{4\pi d}\left(\sin 60° + \sin 60°\right)$$

il contributo nel punto O vale d=L/2tg(60°)

$$B_o^{lato} = \frac{\mu_o I}{2\pi L} tg\left(60°\right)\left[2\sin\left(60°\right)\right] = \frac{3\mu_o I}{2\pi L}$$

Il campo prodotto dai 3 lati vale $B_o^{eequilatero} = 3B_o^{lato} = \frac{9\mu_o I}{\pi L}$ **=3.6x10$^{-5}$ T**

**Facoltativo: l**a spira circolare genera un vettore induzione $B_o^{cerchio} = \frac{\mu_o I}{2R} = \frac{\sqrt{3}\mu_o I}{2L}$

da cui $\frac{B^{cerchio}}{B^{equilatero}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = \mathbf{0.302}$ corrispondente ad una diminuzione del 70%