FISICA

A.A. 2016-2017
Ingegneria Gestionale
3° appello del 18 Settembre 2017
Soluzioni Esame completo

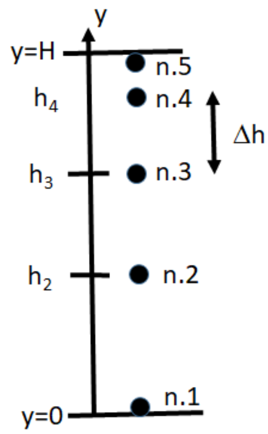
1.Testo. Dal soffione di un box doccia posizionato ad una altezza H=2.00 m dal suolo cadono delle gocce d'acqua a intervalli regolari. Assumendo che tutte le gocce seguano lo stesso tragitto in verticale dal soffione al suolo, e sapendo che la quinta goccia si sta stacca dal soffione esattamente quando la prima goccia tocca il suolo, determinare a quell'istante (1) la quota rispetto al suolo della seconda goccia e (2) la distanza fra la terza e la quarta goccia.

1. Soluzione.

Il moto della prima goccia è descritto dall'equazione $y_1 = H - \frac{1}{2}gt^2$

da cui il tempo di volo della goccia $t^* = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \mathbf{0.64\ s}$

L'intervallo con cui scendono le gocce è $\Delta t = \frac{t^*}{4} = \sqrt{\frac{H}{8g}} = \mathbf{0.16\ s}$



La **seconda goccia** parte ritardata di Δt ed il suo moto è descritto da $y_2(t) = H - \frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2$

al momento t* la sua altezza rispetto al suolo è

$$h_2 = y_2(t^*) = H - \frac{1}{2}g(t^* - \Delta t)^2 = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^2 = \frac{7}{16}H = \mathbf{87.5\ cm}$$

La **terza goccia** parte ritardata di 2Δt ed il suo moto è descritto da $y_3(t) = H - \frac{1}{2}g(t-2\Delta t)^2$

al momento t* la sua altezza rispetto al suolo è

$$h_3 = y_3(t^*) = H - \frac{1}{2}g(t^* - 2\Delta t)^2 = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^2 = \frac{3}{4}H = \mathbf{150\ cm}$$

La **quarta goccia** parte ritardata di 3Δt ed il suo moto è descritto da $y_4(t) = H - \frac{1}{2}g(t-3\Delta t)^2$

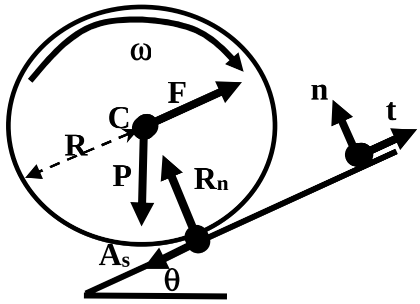
al momento t* la sua altezza rispetto al suolo è

$$h_4 = y_4(t^*) = H - \frac{1}{2}g(t^* - 3\Delta t)^2 = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^2 = \frac{15}{16}H = \mathbf{187.5\ cm}$$

La distanza fra la quarta e la terza goccia è $h_4 - h_3 = \frac{3}{16}H = \mathbf{37.5\ cm}$

2. Testo Una ruota, costituita da un cilindro pieno di raggio R di massa m=5kg viene posta in movimento su un piano inclinato di θ=15° scabro di coefficiente di attrito statico μ_s=0.3, μ_d=0.2, applicando sull'asse del cilindro una forza **F** diretta lungo il piano inclinato. Si calcoli i valori di forza minimo $\mathbf{F_{min}}$ e massimo $\mathbf{F_{max}}$ applicabile che garantisca un moto di puro rotolamento in salita.

2. Soluzione.
Rotolamento della ruota: il moto di rotolamento avviene in accordo alle due equazioni cardinali



1ª Equazione cardinale $\begin{matrix} n \\ t \end{matrix}\begin{cases} R_n = P\cos\theta \\ F - A_s - P\sin\theta = ma \end{cases}$

2ª Equazione cardinale: calcolo dei momenti rispetto a C (l'unico momento non nullo è quello della forza di attrito)

$$M_P + M_F + M_{Rn} + M_{As} = M_{As} = A_s R = I_C \frac{d\omega}{dt}$$

da cui $A_S = \frac{I_C}{R}\frac{d\omega}{dt} = \frac{I_C}{R^2}a$ dove per il rotolamento vale la condizione $a = \frac{d\omega}{dt}R$

Combinando le equazioni $F - \frac{I_C}{R^2}a - P\sin\theta = ma$ da cui $a = \frac{F - P\sin\theta}{m + I_C/R^2} \geq 0$.

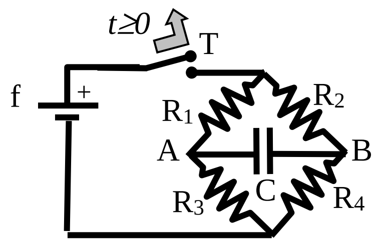
da questa condizione si ottiene il **valore minimo della forza** $F \geq F_{min} = mg\sin\theta = \mathbf{12.7\ N}$

Il **valore massimo della forza** si ottiene dalla condizione sull'attrito statico che deve essere

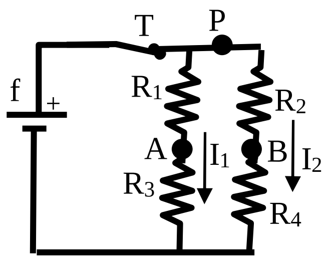
$$A_S = \frac{I_C}{R^2}a = \left(\frac{I_C}{mR^2 + I_C}\right)(F - mg\sin\theta) \leq A_{max} = \mu_s R_n = \mu_s mg\cos\theta \quad \text{da cui}$$

$$F \leq F_{max} = mg\left[\sin\theta + \mu_s\cos\theta\left(1 + \frac{mR^2}{I_C}\right)\right] = mg[\sin\theta + 3\mu_s\cos\theta] = \mathbf{55.3\ N} \quad \text{essendo } I_C = \frac{1}{2}mR^2$$

3. Testo. Un ponte di Wheatstone è da lungo tempo alimentato da una batteria f=15V collegata con le quattro resistenze del ponte R_1=1kΩ, R_2=2kΩ, R_3=1kΩ, R_4=6kΩ come descritto in figura. A causa dello sbilanciamento del ponte il condensatore di capacità C=5μF sul ramo AB ha accumulato una energia elettrostatica E_o. Supponendo di aprire l'interrutore T al tempo t=0, determinare l'energia residua dopo un tempo Δt=2ms.



3. Soluzione.
Fase di carica del condensatore:
Prima dell'apertura dell'interruttore per t<0 il circuito è in condizione stazionaria. Il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto.



La corrente I_1 attraversa in serie R_1, R_3

$$I_1 = \frac{f}{R_1 + R_3} = \mathbf{7.5\ mA}$$

La corrente I_2 attraversa in serie R_2, R_4

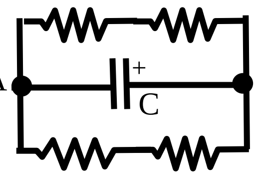
$$I_2 = \frac{f}{R_2 + R_4} = \mathbf{1.875\ mA}$$

Tensione sul condensatore

$$\Delta V_C = V_A - V_B = (V_P - V_B) - (V_P - V_A) = I_2 R_2 - I_1 R_1 = f\left(\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3}\right) = f\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{-\ 3.75\ V}$$

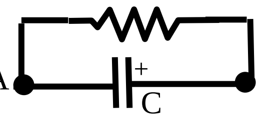
Energia iniziale condensatore: $E_o = \dfrac{q_o^2}{2C} = \dfrac{\Delta V_c^2 C}{2} = \mathbf{35.16\mu J}$

(b)



Fase di scarica del condensatore:
quando l'interruttore viene aperto e la batteria disinserita il condensatore si scarica attraverso le quattro resistenze come riportato in figura (b). La resistenza equivalente di scarica si ottiene effettuando il parallelo $R_{eq} = \dfrac{(R_1 + R_2)\cdot(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \mathbf{2.1\ k\Omega}$

(c)

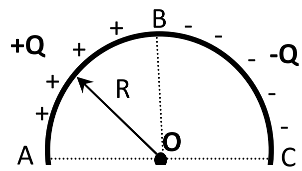


da cui il tempo caratteristico di scarica $\tau_{sc} = R_{eq} C =$ **10.5 ms**

La carica sul condensatore è quindi $q(t) = q_o \exp[-t/\tau_{sc}]$

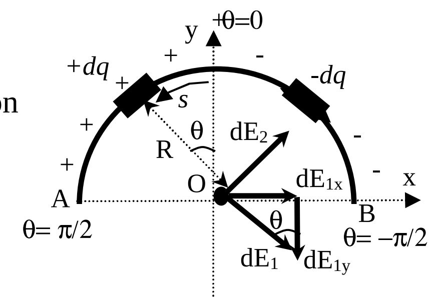
e l' energia $E(t) = \dfrac{q(t)^2}{2C} = \dfrac{q_o^2}{2C}\exp[-2t/\tau_{sc}] = E_o \exp[-2t/\tau_{sc}] = \mathbf{29\ \mu J}$

4. Una carica elettrica di segno alterno viene posizionata lungo una semicirconferenza di raggio R=20cm in modo che la carica positiva Q=10μC viene distribuita uniformemente nel quadrante AB e quella negativa –Q nel quadrante BC. Si calcoli il vettore campo elettrico e potenziale generato nel punto centrale dell'anello O.



4. Soluzione.
La distribuzione complessiva viene vista come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica opposte disposte su archi ci circonferenza

Campo elettrico e potenziale generato
la carica di segno alterno è distribuito sui due archi di circonferenza con densità lineare uniforme $\lambda = 2Q/\pi R$.



La carica positiva disposta nel tratto di lunghezza ds=Rdθ, vale dq=λds =λRdθ

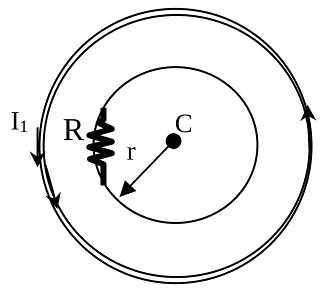
e genera nel punto *O* un contributo $dE_1 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta$

Data la carica +dq esiste sempre una carica simmetrica –dq che genera un contributo dE_2 di egual modulo e direzione come in figura. Per ragioni di simmetria la componente del campo dE_{1y} lungo y viene annullata dal contributo della sorgente simmetrica mentre la componente dE_{1x} viene raddoppiata per cui

$$E_{tot} = 2\int dE_{1,x} = 2\int dE_1 \sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}\int_0^{+\pi/2}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}\left[-\cos\theta\right]_0^{+\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R} = \frac{Q}{\pi^2\varepsilon_o R^2}$$ **=2.87·10⁶ V/m**

Il **potenziale elettrico nel punto O** è invece nullo $V_{tot} = \int dV = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{Q-Q}{4\pi\varepsilon_o R} = 0$

5. Testo. Un solenoide di lunghezza L, costituito da N spire, viene percorso da una corrente variabile nel tempo con legge esponenziale decrescente $I_1(t)=I_o\exp[-t/\tau]$. Una spira metallica circolare di rame di raggio r=10cm di resistenza elettrica R=20Ω è interna e coassiale al solenoide. Trascurando i fenomeni di autoinduzione, raffrontare nel punto C i due vettori induzione magnetica prodotti rispettivamente dal solenoide e dalla spira circolare e calcolare per quale valore del tempo caratteristico τ i due vettori coincidono.



5. Soluzione. Il **vettore induzione magnetica** in tutti i punti interni del solenoide vale

$B_{o,1}(t) = \mu_o\left(\frac{N}{L}\right)I_o\exp[-t/\tau]$ (verso uscente)

Il **flusso concatenato** con la spira circolare vale $\Phi_c(t) = \iint \vec{B}_{o,1}\cdot\hat{n}dS = \mu_o\left(\frac{N}{L}\right)\pi r^2 I_o\exp[-t/\tau]$

Per Faraday-Neumann-Lenz la **f.e.m. indotta** nella spira è $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = \mu_o\left(\frac{N}{L}\right)\frac{\pi r^2 I_o}{\tau}\exp[-t/\tau]$

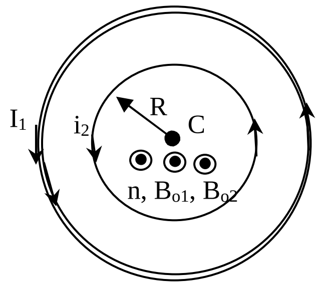
da cui si ricava l'**intensità della corrente indotta nella spira** $i_2 = \frac{f_i}{R} = \frac{\mu_o\pi r^2 N I_o}{LR\tau}\exp[-t/\tau]$

che produce **un campo magnetico indotto** al centro della spira $B_{o2} = \frac{\mu_o i_2}{2r} = \frac{\mu_o^2\pi r N I_o}{2LR\tau}\exp[-t/\tau]$

che ha stessa direzione e verso del campo inducente B_{o1}

Il rapporto fra i due vettori di induzione magnetica in C assume l'espressione $\frac{B_{o2}}{B_{o1}} = \frac{\mu_o\pi r}{2R\tau}$ ed i due vettori

si equivalgono quando si assuma $\tau = \frac{\mu_o\pi r}{2R}$ **=4.9 ns**



FISICA

A.A. 2016-2017

Ingegneria Gestionale

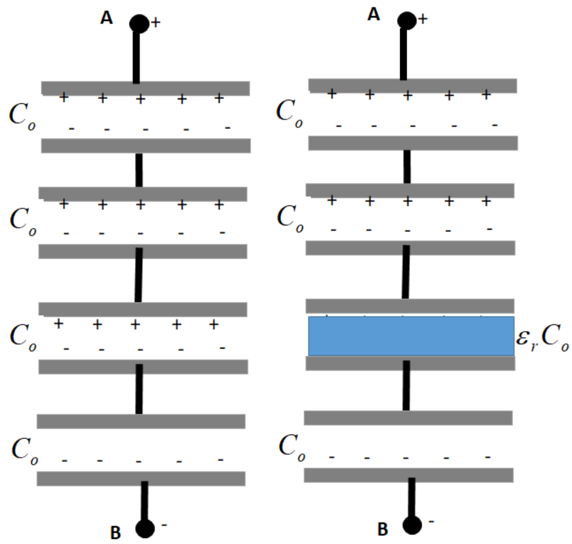
3° appello del 18 Settembre 2017

Soluzione altri esercizi di Esonero

2. Testo. Quattro condensatori identici di capacità C_0=200 pF sono collegati in serie. La d.d.p. tra il primo e l'ultimo condensatore viene mantenuta costante a pari a $\Delta V = 12V$. Tra le armature di uno dei condensatori viene successivamente inserita una lastra di materiale dielettrico con costante dielettrica relativa ε_r. In quest'ultimo caso risulta che l'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema è scesa al 80% di quella iniziale. Si calcoli la costante dielettrica relativa del dielettrico.

2. Soluzione. I quattro condensatori collegati in serie. Sono equivalenti ad un unico condensatore di capacità $C_1 = \frac{C_o}{4}$

che immagazzina l'energia $E_1 = \frac{1}{2}\Delta V^2 C_1 = \frac{1}{2}\Delta V^2\left(\frac{C_o}{4}\right)$



Quando viene inserito il dielettrico la capacità nel terzo condensatore aumenta ma quella totale diminuisce

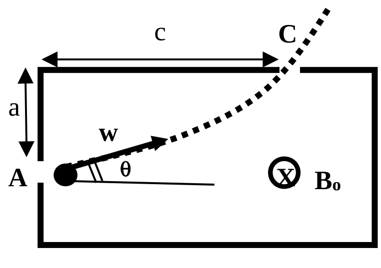
$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_o} + \frac{1}{C_o} + \frac{1}{\varepsilon_r C_o} + \frac{1}{C_o} = \frac{1}{C_o}\left(3 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

da cui $C_2 = C_o\left(\frac{\varepsilon_r}{1+3\varepsilon_r}\right)$

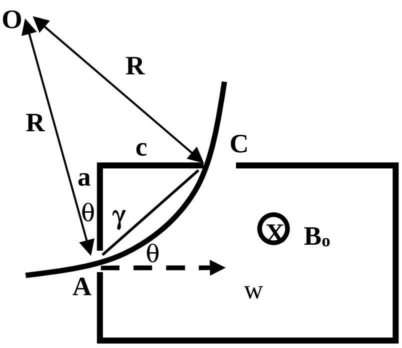
che immagazzina $E_2 = \frac{1}{2}\Delta V^2 C_2 = \frac{1}{2}\Delta V^2 C_o\left(\frac{\varepsilon_r}{1+3\varepsilon_r}\right)$

Imponendo $\frac{E_2}{E_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{4\varepsilon_r}{1+3\varepsilon_r} = \frac{4}{5}$ da cui $\varepsilon_r = \frac{1}{2}$ (il risultato non è fisicamente realistico!)

4. Testo Uno ione di carica $+q$ e di massa m entra dalla fenditura A in una camera parallelepipeda con una velocità w inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Nella camera è presente una induzione magnetica uniforme B_o ortogonale alla velocità che causa una deflessione dello ione che fuoriesce dalla fenditura C praticata sulla parete orizzontale. Conoscendo le posizioni delle fenditure di ingresso ed uscita, il valore della velocità di lancio w**,** la massa m e la carica q dello ione, l'angolo θ, determinare l'intensità dell'induzione magnetica B_o che è necessario imporre per poter fare uscire lo ione dalla camera. (Si trascurino gli effetti gravitazionali)



4. Soluzione. Calcolo del raggio della traiettoria circolare dello ione.



All'interno della camera, lo ione tende a percorrere una traiettoria circolare per effetto della forza di Lorentz (vengono qui trascurati gli effetti gravitazionali)

$$qwB_o = m\frac{w^2}{R} \quad \text{da cui} \quad B_o = \frac{mw}{qR}$$

Essendo in A la velocità di ingresso inclinata di q rispetto all'orizzontale, il centro di curvatura si trova nel punto O lungo la verticale alla distanza R dalla fenditura A. Le due fenditure A, C appartengono inoltre alla circonferenza di raggio R.
Applicando Pitagora generalizzato:

$$R^2 = R^2 + \left(a^2 + c^2\right) - 2R\sqrt{a^2 + c^2}\cos(\theta + \gamma) \qquad \text{ove} \qquad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}\ ; \quad \sin\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$R = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma} = \frac{1}{2}\frac{a^2 + c^2}{a\cos\theta - c\sin\theta}$$

e combinando le equazioni $B_o = \dfrac{mw}{qR} = \dfrac{2mw(a\cos\theta - c\sin\theta)}{q\left(a^2 + c^2\right)}$