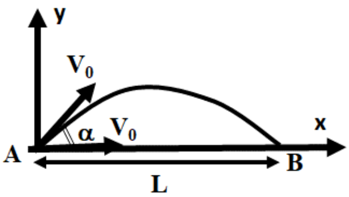
Università di Roma “La Sapienza”
Facoltà di Ingegneria
A.A. 2022-2023
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni del III Appello

1. Testo. Due corpi puntiformi di ugual massa m vengono lanciati nello stesso istante da uno stesso punto di un piano orizzontale scabro con la stessa velocità iniziale $v_o = 0.5$ m/s. Mentre il primo viene lanciato orizzontalmente (lungo il piano), il secondo viene lanciato con la velocità iniziale con una direzione obliqua che forma un angolo $\alpha = 50°$ rispetto all’orizzontale. Sapendo che, al suo ritorno sul piano, il secondo corpo si scontra con il primo, determinare:
a) il tempo di volo del secondo corpo e la quota massima raggiunta;
b) il coefficiente di attrito dinamico tra piano ed il primo corpo.

1. Soluzione.

$$\begin{cases} x(t) = v_o t\cos\alpha \\ v_x = v_o\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases} \text{ ed } \begin{cases} y(t) = v_o t\sin\alpha - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_o\sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$



La quota massima raggiunta si ottiene dalla condizione v_y=0,
da cui $t = v_o\sin\alpha/g$ cui corrisponde **la quota massima** $y = v_o^2\sin^2\alpha/2g$**= 7.5 mm**

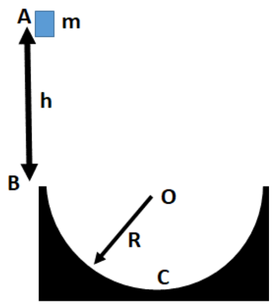
Il tempo di volo si ottiene imponendo y=0 da cui $t = 2v_o\sin\alpha/g$ =**0.078 s**
che permette di calcolare **la gittata** $L = \frac{2v_o^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = v_o^2\sin\ 2\alpha/g$=**25 mm**

L’altro corpo lanciato in orizzontale è soggetto ad un moto rettilineo uniformemente decelerato con velocità $v(t) = v_o - \mu_d g t$ e lo spazio percorso $y(t) = v_o t - \mu_d g\, t^2/2$
Il corpo si ferma all’istante $t = v_o/\mu_d g$ dopo aver percorso lo **spazio** $L = v_o^2/2\mu_d g$

Imponendo che lo spazio percorso dal secondo corpo sia uguale alla gittata del primo si ottiene
$$L = v_o^2/2\mu_d g = v_o^2\sin\ 2\alpha/g$$

da cui il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 1/2\sin\ 2\alpha$=**0.51**

2. Testo. Una guida liscia con profilo semicircolare con raggio R=20 cm, di massa M = 1 kg è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Un punto materiale di massa m = 50 g viene lasciato cadere dal punto A ad una altezza h = 1m, misurata a partire dal bordo della scodella B, posto esattamente sulla verticale del bordo interno sinistro della guida. Calcolare la velocità del punto materiale al suo passaggio nel punto più basso della scodella C.



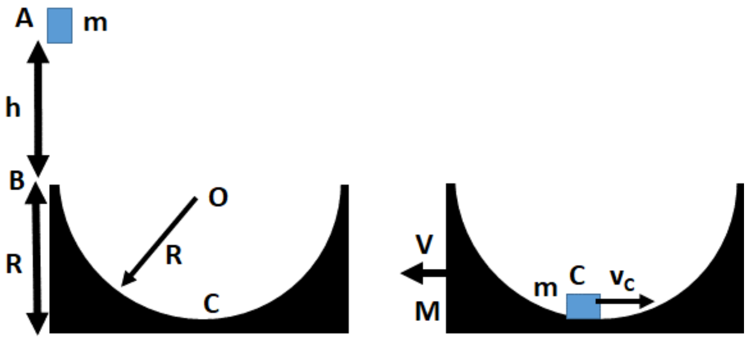
2. Soluzione.
Quando la massa è nella posizione iniziale A, il sistema è fermo, ma possiede l’energia potenziale della massa m per cui E_1=mg(h+R)

Quando la massa raggiunge la posizione C, le due masse m ed M sono dotate dell'energia cinetica $K_2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}MV^2$

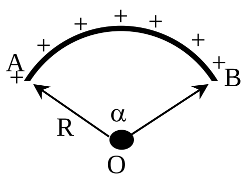
Imponendo la conservazione dell'energia meccanica $mg(h+R) = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}MV^2$
Imponendo la conservazione della quantità di moto in orizzontale $0 = mv_C + MV$

Combinando entrambe le equazioni si ottiene per la velocità v_C l'espressione

$mg(h+R) = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_C^2 = \frac{1}{2}\frac{m(m+M)}{M}v_C^2$ da cui $v_C = \sqrt{\frac{M}{m+M}2g(h+R)} =$ **4.73 m/s**

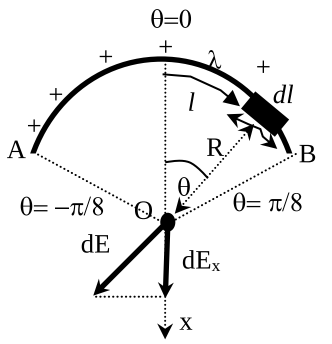


3. Testo. Su un arco AB di una circonferenza di raggio R=50 cm centrata in O viene posta una distribuzione di carica uniforme λ=+50μC/m. Calcolare il vettore del campo elettrico nel punto O quando l'angolo α=45°.



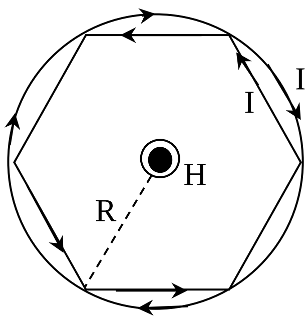
3. Soluzione. Campo elettrico generato da una semicirconferenza

La carica disposta nel tratto dℓ=Rdθ, vale dq=λdℓ =λRdθ
e genera nel punto *O* un contributo $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}d\theta$
lungo la direzione in figura. Per ragioni di simmetria il campo elettrico risultante sarà diretto lungo l'asse delle *x* per cui

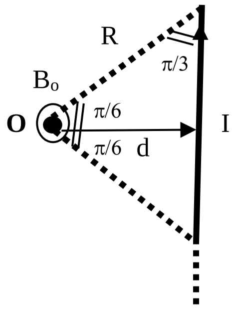


$E = \int dE_x = \int dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\int_{-\pi/8}^{+\pi/8}\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$=**6.89·10^5 V/m**

4. Testo. Una spira esagonale è percorsa dall'intensità di corrente I=5mA che circola nel senso antiorario indicato in figura. Una spira circolare di raggio R=1cm circoscritta a quella esagonale viene invece percorsa in senso orario dalla stessa intensità di corrente I. Calcolare il valore del campo magnetico H e dell'induzione magnetica B nel centro della spira circolare.



4. Soluzione. Induzione magnetica generata da un lato esagonale



Il contributo di induzione magnetica di un tratto rettilineo è

$$\boldsymbol{B_o^{filo}} = \int \boldsymbol{dB_o^{filo}} = \frac{\boldsymbol{\mu_o I}}{\boldsymbol{4\pi d}}(\boldsymbol{sin\,\beta + sin\,\alpha})$$

Nel caso il tratto sia un lato dell'esagono, **$\alpha=\pi/6$, $\beta=\pi/6$**

il contributo nel punto O vale $\boldsymbol{B_o^{lato}} = \frac{\boldsymbol{\mu_o I}}{\boldsymbol{4\pi R\,sin(\pi/3)}}[\boldsymbol{2\,sin(\pi/6)}] = \frac{\boldsymbol{\mu_o I}}{\boldsymbol{2\sqrt{3}\pi R}}$

Poiché ognuno dei 6 lati contribuisce in egual misura si ha $B_o^{esagono} = 6B_o^{lato} = \sqrt{\boldsymbol{3}}\frac{\boldsymbol{\mu_o I}}{\boldsymbol{\pi R}}$

Come noto invece la spira circolare genera un vettore induzione $\boldsymbol{B_o^{cerchio}} = \frac{\boldsymbol{\mu_o I}}{\boldsymbol{2R}}$ in senso opposto

Nel punto centrale O i due campi si contrastano ed il campo differenza vale

$B_o = B_o^{esagono} - B_o^{cerchio}$ da cui $\boldsymbol{B_o} = \frac{\boldsymbol{\mu_o I}}{\boldsymbol{R}}\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{\pi}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)$ **$=3.22 \cdot 10^{-8}$ T**

$H_o = B_o / \mu_o$ da cui $\boldsymbol{H_o} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{R}}\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{3}}}{\boldsymbol{\pi}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right)$ **=0.026 A/m**

Esercizi sostitutivi per esonero

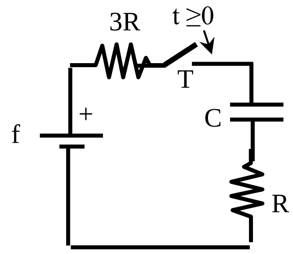
2. Un condensatore sferico è formato da due sfere concentriche di raggio rispettivamente R_1 ed R_2. Esso è riempito con un dielettrico non omogeneo di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r(r) = (a/r)^2$ funzione della distanza *r* dal centro delle sfere. Determinare il rapporto fra la capacità complessiva C del condensatore in esame e la capacità dello stesso condensatore privo di dielettrico C_o. [Dati: R_1=3 cm, R_2=5 cm, a=10 cm].

Soluzione. Con Gauss si ricava il vettore spostamento elettrico $D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$ (solo internamente per $R_1<r<R_2$) con direzione radiale e verso diretto dalla distribuzione positiva verso quella negativa.

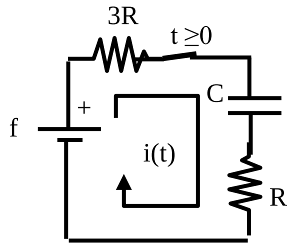
Il campo elettrico è espresso quindi da: $E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2 (a/r)^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a^2}$ (per $R_1<r<R_2$)
La differenza di potenziale fra le due armature è di conseguenza $\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o a^2}(R_2 - R_1)$,
da cui si ottiene la capacità $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_o a^2}{R_2 - R_1}$
Nel caso di assenza di dielettrico la capacità $C_o = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Il rapporto tra le due capacità è quindi $\frac{C}{C_o} = \frac{4\pi\varepsilon_o a^2}{R_2 - R_1} \Big/ 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{a^2}{R_1 R_2}$ **=6.67**

3. Nell'istante t=0 di chiusura dell'interruttore T, nel circuito comincia a fluire corrente ed il condensatore, inizialmente scarico, comincia a caricarsi. Determinare dopo t=10ms i valori della corrente, dell'energia immagazzinata nel condensatore, dell'energia erogata dalla batteria, ed infine delle energie dissipate dalla singole resistenze 3R ed R.
[f=4V, R=1kΩ, C=5μF]



Nell'istante t=0 di chiusura dell'interruttore T, nel circuito comincia a fluire una corrente di intensità variabile nel tempo di espressione



$$i(t) = i_o \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \quad \text{dove} \quad i_o = \frac{f}{\sum R} = \mathbf{1mA} \quad \text{e} \quad \tau = \left(\sum R\right)C = 4RC = \mathbf{20ms}$$

l'intensità dopo un tempo t*=10ms vale $i(t^*) = i_o \exp\left[-\frac{t^*}{\tau}\right] = \frac{i_o}{\sqrt{e}} = \mathbf{0.61mA}$

la **carica erogata dalla batteria ed accumulata nel condensatore** segue quindi l'espressione
$q(t) = fC\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$ che dopo un tempo t*=10ms vale $q(t^*) = fC\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \mathbf{7.87\mu C}$

Le espressioni delle energie erogate dalla batteria, immagazzinata nel condensatore e dissipate nelle resistenze sono le seguenti

$E_{batteria} = f \cdot q(t) = f^2C\left[1 - \exp(-t/\tau)\right]$ da cui $E_{batteria} = f^2C\left[1 - 1/\sqrt{e}\right] = \mathbf{31.5\mu J}$

$E_{condensatore} = q^2(t)/2C = f^2C\left[1 - \exp(-t/\tau)\right]^2/2$ da cui $E_{condensatore} = f^2C\left[1 - 1/\sqrt{e}\right]^2/2 = \mathbf{6.2\mu J}$

$E_R = \int_0^t i^2(t)R\,dt = \frac{i_o^2 R\tau}{2}\left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right]$ da cui $E_R = \frac{f^2C}{8}\left[1 - \frac{1}{e}\right] = \mathbf{6.3\mu J}$

$E_{3R} = 3E_R = \frac{3i_o^2 R\tau}{2}\left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\right]$ da cui $E_{3R} = \frac{3f^2C}{8}\left[1 - \frac{1}{e}\right] = \mathbf{19\mu J}$