



Università di Roma "La Sapienza"

Facoltà di Ingegneria

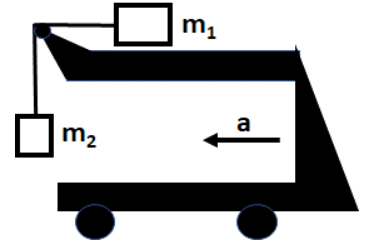
A.A. 2024-2025

Ingegneria Gestionale (M-Z)

3 Appello del 9 settembre 2025

Soluzioni - Esame completo

1. Testo. Sul tetto del furgone è posizionato un blocco $m_1=10\text{kg}$ collegato con una fune ed una puleggia di massa trascurabile ad un blocco sospeso $m_2=5\text{kg}$ come in figura. Il sistema è inizialmente in equilibrio grazie all'attrito statico presente sul tetto del furgone μ_s . Il furgone inizialmente viaggia ad una velocità di 50 km/h ma ad un tratto è costretto a frenare dolcemente con una decelerazione costante fermandosi in 30 m in modo da non perdere il carico delle masse. Determinare quale è il valore del coefficiente di attrito statico minimo affinché la massa m_1 non si muova, ed il corrispondente angolo di inclinazione della massa m_2 rispetto alla verticale.

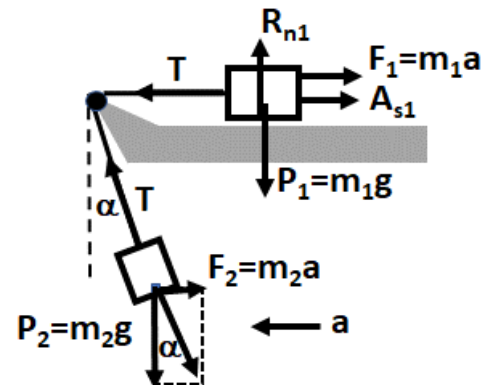


1. Soluzione.

Nel moto decelerato del furgone le grandezze cinematiche in gioco sono:

$$\begin{cases} a(t) = -a \\ v(t) = v_0 - at \\ s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \quad \text{il furgone si ferma al tempo } t = \frac{v_0}{a}$$

Lo spazio di fermata vale $\Delta s = v_0 \left(\frac{v_0}{a} \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2a}$
da cui si ricava la decelerazione $a = \frac{v_0^2}{2\Delta s} = 3.2 \text{ m/s}^2$



Studio del blocco m_2

Il blocco è soggetto alla forza peso $\mathbf{P}_2 = m_2 \mathbf{g}$, alla forza apparente $\mathbf{F}_2 = m_2 \mathbf{a}$, controbilanciate dalla tensione della fune $T = \sqrt{P_2^2 + F_2^2} = m_2 \sqrt{g^2 + a^2} = 51.6 \text{ N}$

con una **inclinazione rispetto alla verticale** $\alpha = \arctan \left(\frac{F_2}{P_2} \right) = \arctan \left(\frac{a}{g} \right) = 18^\circ 10'$

Studio del blocco m_1

Scomponendo le forze

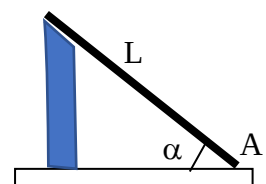
lungo asse verticale: $R_{n1} = P_1 = m_1 g$

lungo asse orizzontale: $A_{s1} = T - F_1 = m_2 \sqrt{g^2 + a^2} - m_1 a$

imponendo la verifica sull'attrito massimo: $A_{s1} = m_2 \sqrt{g^2 + a^2} - m_1 a \leq A_{max} = \mu_s R_{n1} = \mu_s m_1 g$

da cui il **coefficiente di attrito statico minimo** $\mu_s \geq \frac{m_2 \sqrt{g^2 + a^2}}{m_1 g} - \frac{a}{g} = 0.2$

2. Testo. Un'asta omogenea di massa $m=15 \text{ kg}$ e di lunghezza L è appoggiata sul pavimento per l'estremo A, e sorretta da una parete trapezoidale priva di attriti per l'altro estremo B. Supponendo che l'asta sia inclinata di un angolo $\alpha=50^\circ$ rispetto all'orizzontale determinare la reazione fornita dalla parete nella direzione ortogonale alla direzione dell'asta, Determinare inoltre il coefficiente di attrito statico minimo nel punto A affinché il sistema sia in equilibrio.



2. Soluzioni. Le forze agenti sull'asta sono: la reazione della parete **R** applicata in B, il peso **P** dell'asta applicato nel baricentro G (a metà dell'asta), la reazione del pavimento applicata in A composta da una reazione normale **R_n** e da una forza di attrito statico **A_s**. In condizione statiche devono essere contemporaneamente nulle entrambe le equazioni cardinali.

Calcolando la 2^a equazione cardinale nel punto A

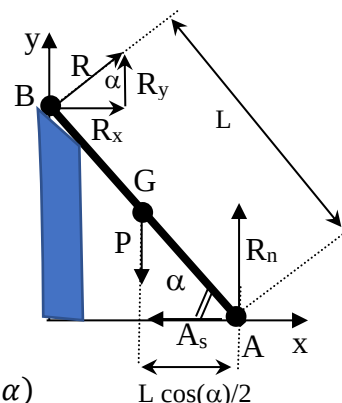
$M_R + M_P = RL - PL \cos \alpha / 2 = 0$ essendo $M_{A_s} = M_{R_n} = 0$
da cui si ricava l'intensità della forza $R = mg \cos \alpha / 2 = 47.2 \text{ N}$

Proiettando la 1^a equazione cardinale lungo x, y:

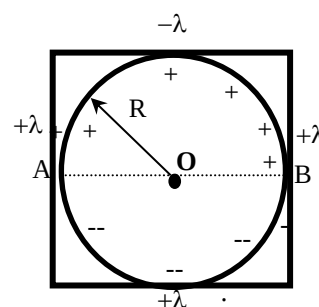
$$\begin{aligned} x) \quad & R_x - A_s = 0 \\ y) \quad & R_n + R_y - P = 0 \end{aligned} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A_s = R_x = R \sin \alpha \\ R_n = P - R_y = P - R \cos \alpha \end{cases}$$

combinando entrambe le equazioni $A_s = R \sin \alpha \leq \mu_s R_n = \mu_s (mg - R \cos \alpha)$

da cui il **coefficiente di attrito statico minimo** $\mu_s \geq \frac{R \sin \alpha}{mg - R \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 - \cos^2 \alpha} = 0.31$



3. Testo. Della carica elettrica di segno alterno viene posizionata lungo un anello circolare di raggio $R=1\text{cm}$ in modo che la carica positiva venga distribuita uniformemente ($+\lambda=10\mu\text{C/m}$) lungo metà anello e quella negativa venga distribuita uniformemente lungo l'altra metà ($-\lambda$). Nel quadrato circoscritto all'anello circolare è posizionata uniformemente della carica sempre con medesima densità ma con segni alterni come indicato in figura. Si calcoli il vettore campo elettrico generato nel punto centrale dell'anello O.



3. Soluzione.

La distribuzione complessiva viene vista come la sovrapposizione di distribuzioni di carica disposte su semicirconferenze e su tratti rettilinei

Campo elettrico generato da una semicirconferenza

Q è distribuita sulla semicirconferenza con densità lineare uniforme $\lambda = Q/\pi R$.

La carica disposta nel tratto $d\ell = R d\theta$, vale $dq = \lambda d\ell = \lambda R d\theta$

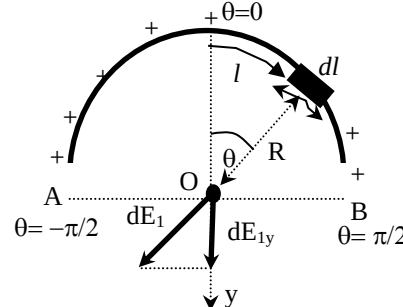
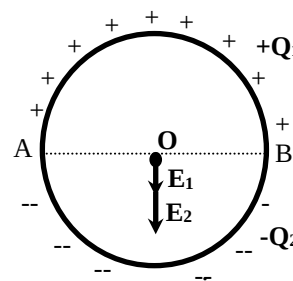
e genera nel punto O un contributo $dE_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\theta$ lungo la direzione in figura

Per ragioni di simmetria il campo elettrico risultante sarà diretto lungo l'asse delle y per cui

$$E_1 = E_{1,y} = \int dE_{1,y} = \int dE_1 \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Campo elettrico generato dall'intero anello

Il secondo semianello genera in O un secondo campo elettrico **E₂** equiverso che si calcola con la stessa formula dimostrata precedentemente e che si somma costruttivamente con **E₁**

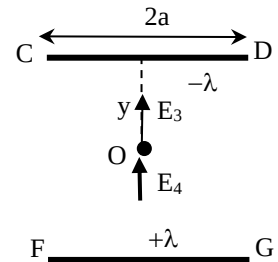


$$E_{tot12} = E_1 + E_2 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 R} \text{ (lungo y)}$$

Campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita lungo un segmento rettilineo orizzontale. Calcolo lungo la mediana

Per ragioni di simmetria il campo elettrico generato da un tratto rettilineo in tutti i punti della mediana del segmento CD risulta ortogonale al segmento stesso e con un modulo

$$E_3(y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \text{ che per } a=R \text{ e } y=R \quad E_3(R) = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R} \text{ (lungo -y)}$$



Campo elettrico generato dai due fili orizzontali

I due fili di lunghezza indefinita generano nel punto O (alla medesima distanza $a=R$ dai due fili) due campi uguali che si sommano

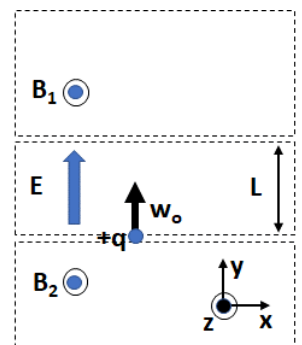
$$E_{tot34} = E_3 + E_4 = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 R} \text{ (lungo -y)}$$

Sommando tutti i contributi lungo y si ottiene il campo complessivo

$$E_{tot} = E_{tot12} + E_{tot34} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.05 \times 10^7 \text{ V/m (lungo y)}$$

I contributi dei tratti rettilinei verticali invece si annullano nel punto centrale O

4. Testo. Una carica $q=10\mu\text{C}$ di massa $m=1\text{mg}$, entra con velocità $w=1\text{m/s}$ (lungo y) in una regione dello spazio dove è presente un campo elettrico $E=150\text{V/m}$ (lungo y) percorrendo una traiettoria rettilinea (lungo y) per un tratto $L=1\text{m}$ fino ad entrare in una regione contigua dove è presente solo un campo di induzione magnetica uniforme $B_1=0.4\text{T}$ (lungo z) come indicato in figura. La carica si incurva e per effetto del solo campo di induzione magnetica riattraversando per intero la regione di partenza dove è presente solo il campo E ed infine sconfinando in un terza regione in basso dove è presente un campo uniforme B_2 (lungo z). Determinare l'intensità di B_2 affinché la carica ritorni al punto di partenza e calcolare il periodo necessario per completare questo tragitto. Pronunciarsi inoltre sulla possibilità che il moto sia periodico.



4. Soluzione.

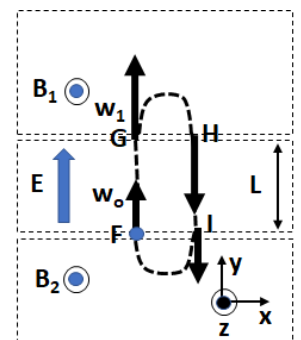
Tratto FG: in questo tratto rettilineo la carica viene accelerata con $a=qE/m=1.5 \text{ m/s}^2$, velocità $w(t) = w_0 + at$

e spazio percorso $s(t) = w_0 t + \frac{1}{2} at^2$

Imponendo $s(t) = L$ si ottiene una equazione di 2 grado da risolvere

per trovare il **tempo di percorrenza** $t_{FG} = -\frac{w_0}{a} + \sqrt{\left(\frac{w_0}{a}\right)^2 + \frac{2L}{a}} = 0.667 \text{ s}$

e la **velocità finale** $w_1 = \sqrt{w_0^2 + 2aL} = 2 \text{ m/s}$



Tratto HI: tratto rettilineo percorso nel tempo $t_{HI} = \mathbf{0.667\ s}$ in cui la carica viene decelerata

Tratto GH: la carica subisce una accelerazione normale che la incurva facendole descrivere una semicirconferenza di raggio $R = \frac{mw_1}{qB_1} = \mathbf{500\ m}$,

in un tempo pari ad un semiperiodo $t_{GH} = \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{w_1} = \frac{\pi m}{qB_1} = \mathbf{785.4\ s}$,

Tratto IF: la carica subisce una accelerazione normale che la incurva facendole descrivere una semicirconferenza analoga di medesimo raggio $R = \frac{mw_0}{qB_2} = \frac{mw_1}{qB_1} = \mathbf{500\ m}$ in modo che la traiettoria complessiva sia una curva chiusa. Da questa condizione si ricava l'intensità della induzione magnetica $B_2 = B_1 \frac{w_0}{w_1} = \mathbf{0.2\ T}$

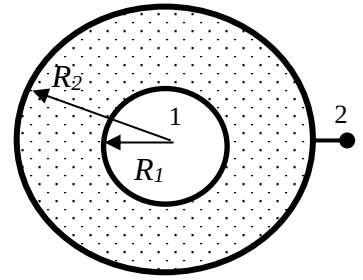
in un tempo di percorrenza pari ad un semiperiodo $t_{GH} = \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{w_0} = \frac{\pi m}{qB_2} = \mathbf{1571\ s}$,

Il **tempo complessivo** per descrivere il periodo della traiettoria vale

$$T_{tot} = t_{FG} + t_{GH} + t_{HI} + t_{IF} = \mathbf{2358\ s},$$

Esercizi sostitutivi per secondo esonero

1. Testo. Un condensatore sferico è costituito da due conduttori sferici concentrici di raggi $R_1=3\text{cm}$ e $R_2=5\text{cm}$ in mezzo ai quali viene omogeneamente collocato un dielettrico omogeneo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r=3$. Sapendo che tale dielettrico può sopportare un campo elettrico massimo $E_{\max}=5\text{kV/m}$ calcolare la massima differenza di potenziale applicabile fra le due armature. Facoltativo: Calcolare la massima carica ammissibile sulle armature.



1. Soluzione. In un condensatore sferico il campo elettrico è non nullo solo all'interno delle armature $R_1 < r < R_2$. Il calcolo del campo elettrico si ottiene applicando la legge di Gauss. $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$

Sulla armatura interna $r=R_1$ il campo elettrico raggiunge il valore più elevato che mette il dielettrico a rischio di rottura. La stabilità del condensatore è legata quindi alla seguente condizione

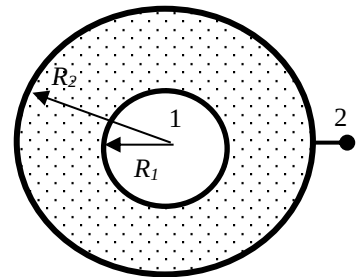
$$E(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1^2} \leq E_{\max} \quad \text{da cui la carica massima ammissibile è} \quad Q_{\max} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1^2 E_{\max} = 1.5\text{nC}$$

La differenza di potenziale fra le armature si ottiene integrando il campo elettrico tra R_1 ed R_2

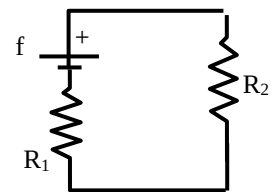
$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

La massima differenza di potenziale si ottiene quando $Q=Q_{\max}$

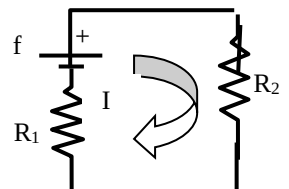
$$\Delta V_{\max} = \frac{Q_{\max}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} = E_{\max} \frac{R_1(R_2 - R_1)}{R_2} = 60 \text{ V}$$



2. Testo. Nel circuito elettrico indicato in figura si determini il valore minimo della resistenza R_1 , per limitare contemporaneamente la corrente e la potenza dissipata sulla resistenza R_1 al di sotto dei valori massimi rispettivamente consentiti per la corrente $I_{\max}=1\text{mA}$, e per la potenza dissipata $P_{\max}=10\text{mW}$. Dati del problema: $f=10\text{V}$, $R_2=2\text{k}\Omega$.



2. Soluzione. La corrente I circolante nella maglia si calcola dividendo la forza elettromotrice fornita dalla batteria per la somma delle resistenze attraversate dalla medesima corrente di maglia. Tale corrente deve essere inferiore alla corrente massima $I_{\max}$ come imposto dalla condizione



$$I = \frac{f}{R_1 + R_2} \leq I_{\max} \quad \text{da cui si ricava la disequazione} \quad R_1 \geq \frac{f}{I_{\max}} - R_2 = \frac{10}{10^{-3}} \left(\frac{\text{V}}{\text{A}} \right) - 2\text{k}\Omega = 8\text{k}\Omega \quad (1)$$

La seconda condizione riguarda la potenza massima dissipabile su R_1 .

$$P = I^2 R = f^2 \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} \leq P_{\max} \quad \text{che porta alla disequazione} \quad R_1^2 + \left(2R_2 - \frac{f^2}{P_{\max}} \right) R_1 + R_2^2 \geq 0$$

Gli zeri della corrispondente equazione sono $R_0^\pm = \frac{f^2}{2P_{\max}} - R_2 \pm \sqrt{\frac{f^4}{4P_{\max}^2} - \frac{f^2 R_2}{P_{\max}}} = \begin{cases} R_0^- = 0.76k\Omega \\ R_0^+ = 5.23k\Omega \end{cases}$

da cui si ricava la seconda disequazione $\begin{cases} R_1 \leq 0.76k\Omega \\ R_1 \geq 5.23k\Omega \end{cases}$

che messa a sistema con la prima disequazione (1) fornisce la condizione risultante finale che soddisfa entrambe le limitazioni **$R_1 \geq 8 k\Omega$**