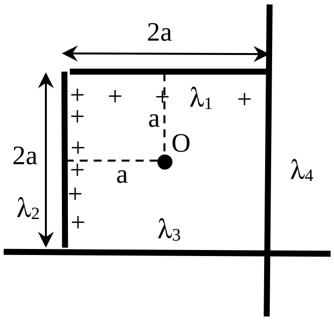
FISICA

A.A. 2015-2016

Ingegneria Gestionale

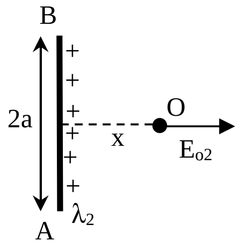
Soluzioni del 3° appello

1. Della carica elettrica è distribuita lungo due segmenti contigui mutuamente ortogonali di medesima lunghezza 2a=20cm, ma con densità lineica differente λ_1=60μC/m e λ_2=80μC/m. Vengono poi aggiunti due fili infinitamente lunghi complanari per completare una figura quadrata (come in figura) Determinare le rispettive densità lineiche λ_3 e λ_4 che è necessario imporre su tali fili indefiniti affinchè si annulli il campo elettrico complessivo al centro nel punto O



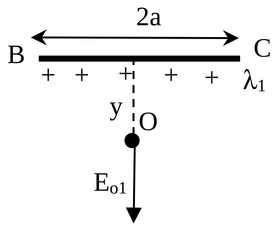
1. Campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita lungo un segmento rettilineo. Calcolo lungo la mediana

Per ragioni di simmetria il campo elettrico generato dalla seconda distribuzione in tutti i punti della mediana del segmento AB risulta ortogonale al segmento stesso e con un modulo



$$E_{o2}(x)=\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{che per } x=a \quad E_{o2}(O)=\frac{\lambda_2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a} \ \textbf{(lungo x)}$$

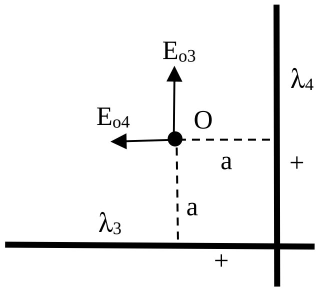
Calcolo analogo per la prima distribuzione lungo il segmento BC porta a



$$E_{o1}(y)=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o y}\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \quad \text{che per } y=a \quad E_{o1}(O)=\frac{\lambda_1}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a} \ \textbf{(lungo y)}$$

Campo elettrico generato dai fili di lunghezza infinita

I due fili di lunghezza indefinita generano nel punto O (alla medesima distanza a dai due fili) i campi in figura

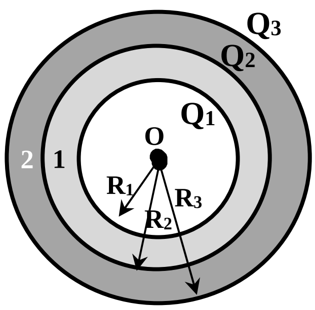


$$E_{o3}(O)=\frac{\lambda_3}{2\pi\varepsilon_o a} \ \textbf{(lungo y)} \quad \text{e} \quad E_{o4}(O)=\frac{\lambda_4}{2\pi\varepsilon_o a} \ \textbf{(lungo x)}$$

Dall'annullamento del campo elettrico complessivo in O si ottiene

$$\lambda_3=\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}=\textbf{42.4 μC/m} \qquad \lambda_4=\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}=\textbf{56.6 μC/m}$$

2. Su tre gusci conduttori cilindrici concentrici di lunghezza L=50cm, e di raggio rispettivamente R_1=5cm, R_2=10cm, R_3=15cm sono disposte delle cariche superficiale Q_1, Q_2=+6μC, Q_3=+10μC. Le due intercapedini 1 e 2 sono riempite da due dielettrici con costante dielettrica relativa rispettivamente ε_{r1}=4, ε_{r2}=2, che richiedono una limitazione di campo elettrico che non deve essere superiore rispettivamente a $E_{max1}=1\times10^6$ V/m, $E_{max2}=2\times10^6$ V/m. Nello spazio esterno invece c'è aria (ε_r=1) che ha un rigidità dielettrica $E_{aria}=3\times10^6$ V/m. Determinare per quali intervalli di valori di Q_1 (con segno!) viene garantita la limitazione del campo nei dielettrici e nell'aria per evitare la rottura del dispositivo.



2. Campo elettrico interno

Applicando la legge di Gauss per lo spostamento elettrico per un qualsiasi punto dello spazio $\Phi(D) = (2\pi r)L = Q_{\text{int}}$ da cui $D = \dfrac{Q_{\text{int}}}{2\pi r L}$ dove Q_{int} è la carica interna alla superficie di Gauss.

Il campo elettrico in tutte le zone vale quindi

$$\begin{cases} r < R_1 & E_o = \dfrac{D}{\varepsilon_o} = 0 \\ R_1 < r < R_2 & E_1 = \dfrac{D}{\varepsilon_o \varepsilon_{r1}} = \dfrac{Q_1}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1} r L} \\ R_2 < r < R_3 & E_2 = \dfrac{D}{\varepsilon_o \varepsilon_{r2}} = \dfrac{Q_1 + Q_2}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r2} r L} \\ r > R_3 & E_3 = \dfrac{D}{\varepsilon_o} = \dfrac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\pi\varepsilon_o r L} \end{cases}$$

con la condizione che in ogni zona $|E(r)| \le E_{\max}$

Ciò porta ad un sistema di tre disequazioni. Una disequazione per ogni regione dello spazio.

a) $|E_1(R_1)| = \dfrac{|Q_1|}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1} R_1 L} \le E_{1\max}$ $\quad |Q_1| \le E_{1\max}(2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1} R_1 L)$ da cui $-5.56\mu C \le Q_1 \le 5.56\mu C$

(calcolata nel punto più critico della zona 1 per $r=R_1$ dove il modulo del campo è maggiore)

b) $|E_2(R_2)| = \dfrac{|Q_1 + Q_2|}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r2} R_2 L} \le E_{2\max}$, $|Q_1 + Q_2| \le E_{2\max}(2\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r2} R_2 L)$ da cui $-17.1\mu C \le Q_1 \le 5.11\mu C$

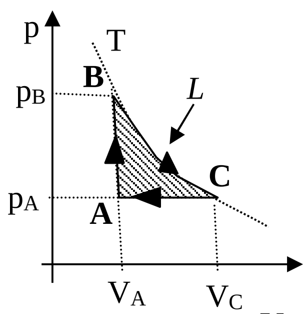
(calcolata nel punto più critico della zona 2 per $r=R_2$ dove il modulo del campo è maggiore)

c) $|E_3(R_3)| = \dfrac{|Q_1 + Q_2 + Q_3|}{2\pi\varepsilon_o R_3 L} \le E_{aria}$, $|Q_1 + Q_2 + Q_3| \le E_{aria}(2\pi\varepsilon_o R_3 L)$ da cui $-28.5\mu C \le Q_1 \le -3.5\mu C$

(calcolata nel punto più critico della zona 2 per $r=R_3$ dove il modulo del campo è maggiore)

Che ha soluzione **nel range di carica :** $-5.56\mu C \le Q_1 \le -3.5\mu C$

3. Un gas nello stato A occupa $2m^3$ alla pressione di 10^5 Pa. Su di esso viene effettuato un ciclo termodinamico realizzato da 3 trasformazioni reversibili: una isocora che ne triplica la pressione del gas portandolo ad uno stato B, una trasformazione isoterma che ne triplica il volume portandolo ad uno stato C, ed una compressione isobara che riporta il gas nelle condizioni iniziali. Determinare il lavoro meccanico complessivo del ciclo.



3. Il gas, inizialmente nello stato *A* del piano di Clapeyron, occupa un volume $V_A=2m^3$ alla pressione $p_A=10^5$ Pa. La trasformazione isocora *AB* avviene senza variazione di volume e quindi senza spesa di lavoro $L_{AB}=0$. Il gas in *B* occupa ancora lo stesso volume $V_B=V_A=2m^3$, ma alla pressione doppia $p_B=3p_A=3\cdot 10^5$ Pa. Nella espansione isoterma BC valendo la relazione $p_C V_C = p_B V_B$ la pressione si riabbassa al valore iniziale $p_C = p_B V_B / V_C = 3 p_A V_B / 3V_B = p_A = 10^5$ Pa,

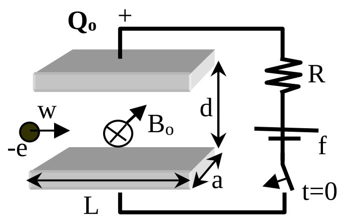
Il lavoro ottenuto da questa espansione isoterma è:

$$L_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} p dV = nRT \int_{V_B}^{V_C} dV/V = nRT \ln(V_C/V_B) = p_B V_B \ln(V_C/V_B) = 2 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot \ln(3)\ \text{J} = \mathbf{+659\ kJ.}$$

Il ciclo si chiude con una compressione isobara a pressione $p_C = p_A = 10^5$ Pa, che riporta il gas da *C* in *A*.

Il lavoro negativo della compressione è $L_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} p dV = p_A \int_{V_C}^{V_A} dV = p_A (V_A - V_C)$ $=10^5$ Pa$\cdot$(2m^3-6m^3) = **-400 kJ <0**. Il lavoro totale utile del ciclo è $L_{ciclo} = L_{BC} + L_{CA} =$ **259 kJ.**

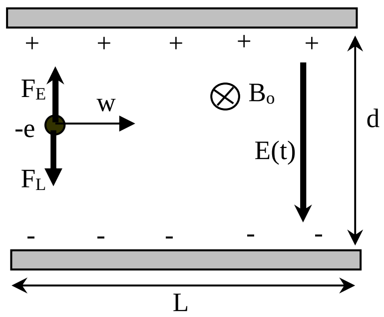
4. Un condensatore piano è costituito da due armature rettangolari identiche di spigoli *a,L*, poste alla distanza *d*. Il condensatore ha una carica iniziale Q_o. e viene ulteriormente caricato da una batteria di f.e.m. f. Fra le armature del condensatore viene anche applicato un vettore induzione magnetica uniforme B_o. Dopo la chiusura dell'interruttore (t>0) viene lanciato un elettrone alla velocità *w* fra le armature del condensatore nella direzione parallela al lato L. Quanto tempo T è necessario attendere dalla chiusura dell'interruttore in modo da mantenere la traiettoria dell'elettrone rettilinea? [Dati: B_o=0.1 T, w=10^4 m/s, R=1MΩ, d=1mm, L=0.5m, a=1m, Qo=1nC, f=2V]



4. L'elettrone attraversa una regione di spazio dove sono simultaneamente non nulli campo elettrico e campo magnetico. Esso subisce una forza complessiva $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_L = -e\vec{E}(t) - e\vec{w} \times \vec{B}_o$

Nel caso riportato in figura la forza totale si può annullare quando

$$E(t) = wB_o$$



Il condensatore, che ha una carica iniziale Q_o, viene ulteriormente caricato dalla batteraa. L'evoluzione della carica segue la legge

$$Q(t) = Q_o \exp(-t/RC) + fC[1 - \exp(-t/RC)] = (Q_o - fC)\exp(-t/RC) + fC$$

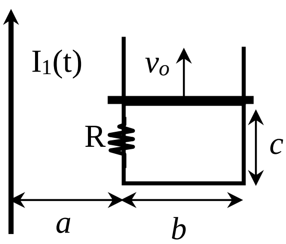
Il campo elettrico all'interno del condensatore varia con legge

$$E(t) = \frac{\Delta V_c}{d} = \frac{Q(t)}{d \cdot C} \quad \text{dove} \quad C = \varepsilon_o \frac{aL}{d} = \mathbf{4.42\ nF}, \quad \tau = RC = \mathbf{4.4\ ms}$$

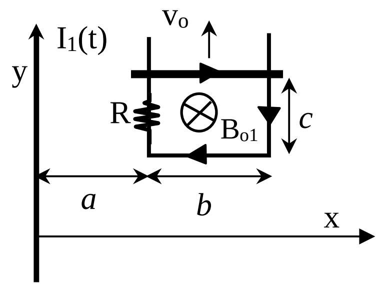
Combinando le equazioni si ottiene il tempo necessario affinchè $E(T) = wB_o$

$$T = RC \cdot \ln\left(\frac{f - Q_o/C}{f - dwB_o}\right) = \mathbf{2.53\ ms}$$

5. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1(t) = I_o*(1+k\cdot t)^{-1}$. Una spira rettangolare di lati *b,c* giace con il filo nel piano del foglio come indicato in figura ad una distanza minima *a* dal filo. La spira è inoltre costituita da 3 lati fissi ed un lato mobile che viene spostato alla velocità costante v_o=2m/s. Assumendo la resistenza elettrica della spira R=2Ω, determinare per quale valore di *k* la forza elettromotrice e la corrente indotta è sempre nulla nella spira. **Facoltativo:** ripetere l'esercizio bloccando il lato mobile. Calcolare la corrente indotta. [Dati: I_o=20A, a=1m, b=2m, c=4m]



5. Il filo genera un vettore induzione magnetica di intensità $B_{o1}(x,t)=\dfrac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$.



Il flusso concatenato in accordo all'orientazione scelta in figura vale

$$\Phi_c=\int \vec{B}_{o1}\cdot\hat{n}dS=\int B_{o1}dS=\frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi}\int_o^{y(t)}dy\int_a^{a+b}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_o I_1(t)y(t)}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

$$\Phi_c=\frac{\mu_o I_o}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\left[\frac{c+v_o t}{1+k\cdot t}\right]$$

Imponendo la nullità della **forza elettromotrice indotta nella spira**

$$f_i=-\frac{d\Phi_c}{dt}=-\frac{\mu_o I_o}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\left[\frac{v_o(1+kt)-k(c+v_o t)}{(1+kt)^2}\right]=0$$

si ottiene $v_o(1+kt)-k(c+v_o t)=0$ ossia $k=v_o/c=$ **0.5 s^{-1}**

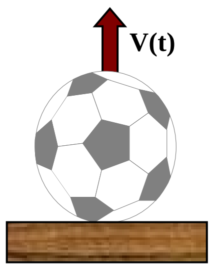
Facoltativo: imponendo $v_o=0$

$$f_i=-\frac{d\Phi_c}{dt}=-\frac{\mu_o I_o}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{-kc}{(1+kt)^2}=\ \mathbf{8.8\ \mu V}\ \text{(per t=0)}$$

la **corrente indotta** al tempo t=0 $\quad I_{2o}=\dfrac{f_{i0}}{R}=$ **4.4 μA** (la direzione come in figura)

ESERCIZI DI MECCANICA per ESAME COMPLETO

1. Un pallone di massa *m* viene calciato in verticale verso l'alto con una velocità iniziale v_o=20m/s. Ipotizzando che la resistenza dell'aria eserciti una forza di reazione del tipo $\vec{R}=-b\vec{v}$ da cui si calcola un valore della velocità limite asintotica v_{lim}=80m/s, determinare l'istante in cui la palla raggiunge la massima quota e confrontare tale valore con quello che si avrebbe trascurando la resistenza dell'aria: **Facoltativo:** determinare la differenza tra la quota ottenuta in assenza e in presenza d'aria. **Nota bene**: il valore della massa *m* sebbene non noto, concorre al valore v_{lim}



1. Il pallone lanciato verso l'alto si muove sotto l'effetto di due forze entrambe rivolte verso il basso: la forza peso e la reazione del mezzo alla velocità

$-mg-bv_y=ma_y=m\dfrac{dv_y}{dt}$ da cui si ricava l'eq. differenziale $\dfrac{dv_y}{v_y+\left(\dfrac{mg}{b}\right)}=-\left(\dfrac{b}{m}\right)dt$

che integrata nell'intervallo [0,t] cui corrispondono i valori di velocità [v_o,v_y(t)]

$$\int_{v_o}^{v(t)}\frac{dv_y}{v_y+\left(\frac{mg}{b}\right)}=\ln\left[\frac{v_y(t)+mg/b}{v_o+mg/b}\right]=-\left(\frac{b}{m}\right)t \quad \text{con soluzione} \quad v_y(t)=-\left(\frac{mg}{b}\right)+\left(v_o+\frac{mg}{b}\right)\exp\left[-\left(\frac{b}{m}\right)t\right]$$

Dalla teoria si ricava che la velocità limite asintotica è espressa come $v_{\lim} = \frac{mg}{b}$

Sostituendo questa espressione nella precedente soluzione si ottiene

$$v_y(t) = -v_{\lim} + (v_o + v_{\lim})\exp\left[-\frac{gt}{v_{\lim}}\right]$$

che si annulla al tempo $t = \frac{v_{\lim}}{g}\ln\left(1+\frac{v_o}{v_{\lim}}\right) = \mathbf{1.822\ s}$

da confrontare con il valore in assenza di resistenza dell'aria $t = \frac{v_o}{g} = \mathbf{2.041\ s}$

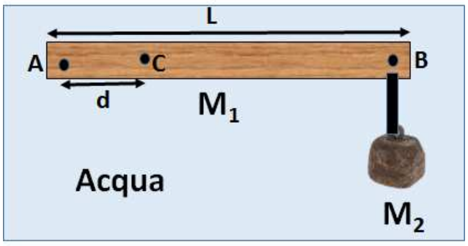
mentre lo spaio percorso si ottiene dalla $v(t) = \frac{dy}{dt}$ da cui $y(t) = y_o + \int_{to}^{t} v(t)dt$

Facoltativo: Lo spazio percorso si ottiene per integrazione

$y(t) = -v_{\lim}t + (v_o + v_{\lim})\frac{v_{\lim}}{g}\left\{1-\exp\left[-\frac{gt}{v_{\lim}}\right]\right\}$ che dopo **t=1.822** s porta alla quota massima **h=17.5 m**

inferiore alla quota senza resistenza dell'aria $h_{vuoto} = \frac{v_o^2}{2g} = \mathbf{20.4\ m}$

2. Una trave omogena di legno di massa M_1=10kg, di lunghezza L=1m, di densità d_1=400 kg/m^3 è completamente immersa in una vasca d'acqua (densità d_A=1000 kg/m^3). La trave è incardinata nel punto C e, per evitare che venga a galla, viene ulteriormente ancorata per l'estremo B ad una massa di piombo (densità d_2=11000 kg/m^3). Sapendo che la distanza dell'estremo A da cardine C è AC=d=10cm, determinare il valore della massa M_2 dell'ancora che mantiene in perfetto equilibrio il sistema. Si considerino le spinte di Archimede su entrambe le masse.



2. Statica della trave

Nel baricentro G della trave viene applicata la forza peso $P_1=M_1g$ (verso il basso)

e la relativa spinta di Archimede che è pari a $S_1 = d_A V_1 g = d_A\left(\frac{M_1}{d_1}\right)g = \left(\frac{d_A}{d_1}\right)P_1$ (verso l'alto**)**

Il baricentro si trova a metà della trave ossia alla distanza **CG=L/2-d**

All'estremità B della trave viene applicata la forza peso $P_2=M_2g$ (verso il basso)

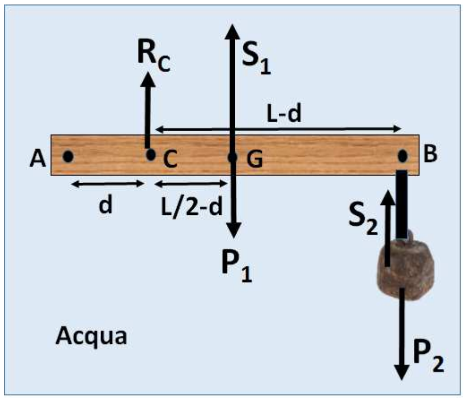
e la relativa spinta di Archimede che è pari a $S_2 = d_A V_2 g = d_A\left(\frac{M_2}{d_2}\right)g = \left(\frac{d_A}{d_2}\right)P_2$ **(**verso l'alto**)**

Nel cardine C è anche applicata una reazione R_C

Imponendo la nullità della seconda equazione cardinale (rispetto a C)

$$(P_1 - S_1)\left(\frac{L}{2} - d\right) + (P_2 - S_2)(L-d) = 0 \quad \text{da cui} \quad (P_2 - S_2) = \frac{L/2 - d}{L-d}(S_1 - P_1)$$

Dopo qualche passaggio si ottiene $M_2 g\left(1-\frac{d_A}{d_2}\right)=\left(\frac{L/2-d}{L-d}\right)M_1 g\left(\frac{d_A}{d_1}-1\right)$



da cui $M_2=M_1\left(\frac{L/2-d}{L-d}\right)\left(\frac{\frac{d_A}{d_1}-1}{1-\frac{d_A}{d_2}}\right)=$ **0.733 M_1=7.33 kg**