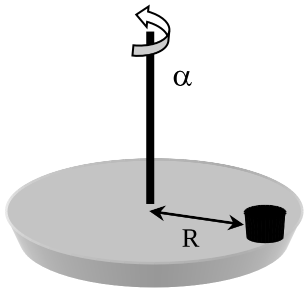
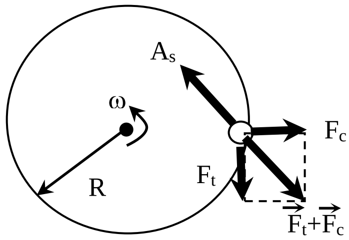
FISICA

A.A. 2020-2021
Ingegneria Gestionale
3° appello del 17 settembre 2021
Esame completo - Soluzioni

1. Testo. Una moneta di massa m=10 g è collocata su un disco rotante ad una distanza R= 15 cm dall'asse. I coefficienti di attrito tra la moneta ed il disco sono 0.7 (statico) e 0.6 (dinamico). Sapendo che il disco inizialmente fermo viene accelerato uniformemente con accelerazione angolare α=0.05 rad/s^2, determinare in quale istante la moneta non riesce più ad aderire e comincia a slittare sul disco.



1. Soluzione. Nel sistema non inerziale la moneta è soggetta a due forze apparenti: una forza centrifuga $F_c=m\omega^2R=m(\alpha t)^2R$, ed una forza tangenziale $F_t=m\alpha R$. La risultante R delle due forze si ottiene sommando vettorialmente tali due forze ortogonali. La sua intensità è $R=\sqrt{F_c^2+F_t^2}=m\alpha R\sqrt{1+\alpha^2t^4}$
Tale risultante viene esattamente controbilanciata dall'attrito statico

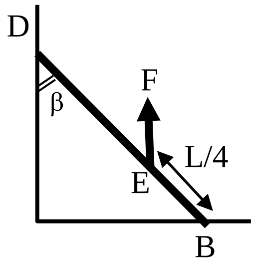


$$A_s = R \le A_{max}^2 \quad \text{da cui} \quad m\alpha R\sqrt{1+\alpha^2t^4} \le \mu_s mg$$

da cui con alcuni passaggi $\sqrt{1+\alpha^2t^4} \le \dfrac{\mu_s g}{\alpha R}$, e quindi $\alpha^2t^4 \le \left(\dfrac{\mu_s g}{\alpha R}\right)^2 - 1$

da cui si ottiene l'istante di tempo al quale la moneta si distacca $t \le \dfrac{\sqrt[4]{\left(\dfrac{\mu_s g}{\alpha R}\right)^2-1}}{\sqrt{\alpha}}$ = **135 s**

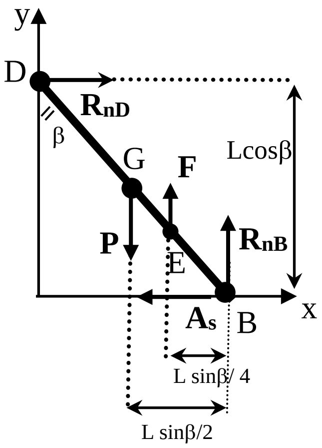
2. Testo. Un'asta omogenea avete massa m=6kg e lunghezza L=1m è disposta come in figura con gli estremi B,D appoggiati su due superfici piane, rispettivamente orizzontale e verticale. L'asta è inclinata rispetto al piano verticale di un angolo β=30° ed è tenuta in equilibrio da un palloncino che esercita una spinta verticale F=10 N verso l'alto nel punto E ad una distanza L/4 dal punto di appoggio B. Si calcoli quale è la forza di attrito necessaria a garantire la statica e quale è il coefficiente di attrito statico minimo μ_s.



2. Soluzione. Statica della scala
Le forze agenti sull'asta sono: la forza peso dell'asta **P=mg** applicata nel baricentro G (a metà dell'asta supposta omogenea), la spinta verticale **F** applicata in E, la reazione del pavimento $\mathbf{R_{nB}}$ e la forza di attrito statico $\mathbf{A_s}$ applicate entrambe in B, e la reazione normale dalla parete $\mathbf{R_{nD}}$. In condizione statiche entrambe le equazioni cardinali devono essere contemporaneamente nulle.

Proiettando la 1ª equazione cardinale lungo x, y:

$$\begin{aligned} x)&\left\{\begin{aligned} R_{nD} - A_s &= 0 \\ R_{nB} - P + F &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{da cui} \quad \left\{\begin{aligned} A_s &= R_{nD} \\ R_{nB} &= mg - F \end{aligned}\right. \\ y)& \end{aligned}$$



Calcolando la 2ª equazione cardinale nel punto B

$$M_{RnD} + M_P + M_F = R_{nD} L\cos\beta - mgL\sin\beta/2 + FL\sin\beta/4 = 0$$

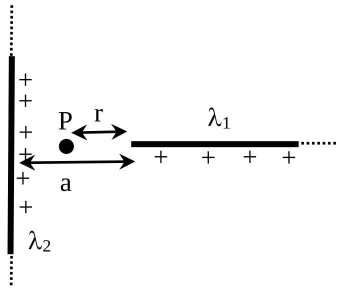
essendo $M_{As} = M_{RnB} = 0$

da cui si ricava l'intensità della forza $R_{nD} = \left(\frac{mg}{2} - \frac{F}{4}\right)tg\beta$

combinando le equazioni $A_s = R_{nD} = \left(\frac{mg}{2} - \frac{F}{4}\right)tg\beta \le A_{max} = \mu_s R_{nB} = \mu_s(mg - F)$

da cui $\mu_s \ge \frac{mg - F/2}{mg - F}\frac{tg\beta}{2} = \mathbf{0.318}$ e l'attrito è $A_s = \left(\frac{mg}{2} - \frac{F}{4}\right)tg\beta = \mathbf{15.5}$ N

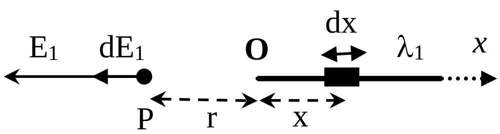
3. Testo. Due distribuzioni di carica entrambe positive sono disposte lungo una semiretta ed una retta mutuamente ortogonali come riportato in figura. Le cariche sono distribuite uniformemente con densità lineica differente λ_1 (per la semiretta) e λ_2 (per la retta). Chiamando *a* che la distanza minima fra le due distribuzioni e sapendo che il campo elettrico complessivo si annulla nel punto P alla distanza *r=a/2*, determinare quale deve essere il rapporto fra le due densità lineiche di carica λ_2/λ_1



3. Soluzione. Campo elettrico generato dalla prima distribuzione

Fissato in O l'origine della semiretta, alla distanza generica x si trova una carica elementare $dq=\lambda_1 dx$ che genera nel punto P il contributo elementare

$$dE_1 = \frac{\lambda_1 dx}{4\pi\varepsilon_o (x + r)^2}$$

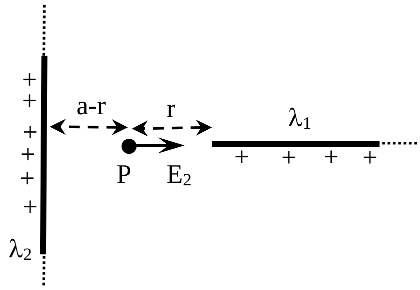


Tale contributo di verso opposto all'asse x viene integrato lungo tutto il semiasse positivo delle *x* fornendo un valore complessivo di campo elettrico

$$E_1 = \int dE_1 = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^\infty \frac{dx}{(x+r)^2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o r}.$$

Campo elettrico generato dalla seconda distribuzione

Come ben noto dalla teoria un filo indefinito uniformemente carico genera nel punto P un campo elettrico lungo l'asse x di valore

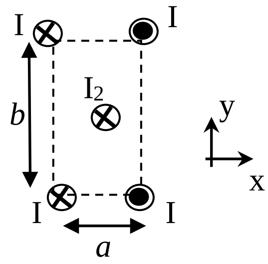


$$E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o(a-r)} \quad \text{quando } r<a$$

I campi elettrici trovati E_1 ed E_2 sono quindi di verso opposto e si possono controbilanciare nel punto di equilibrio P quando

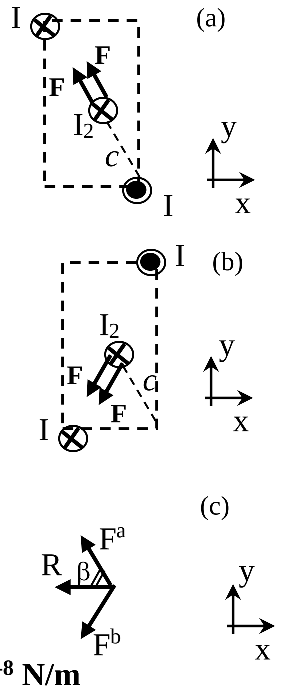
$$E_1 = E_2 \quad \text{e cioè} \quad \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o r} = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o(a-r)} \quad \text{da cui} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}-1\right) = \mathbf{0.5}$$

4. Testo. Quattro fili indefiniti paralleli percorsi dalla corrente I=10mA sono posti ai vertici di un rettangolo di lati *a*=1mm, *b*=2mm come indicato in figura. Si calcoli l'intensità, la direzione ed il verso della forza per unità di lunghezza agente sul filo indefinito posto al centro del rettangolo percorso dalla corrente I_2=20mA.



4. Soluzione. Calcolo delle forze agenti

Le forze per unità di lunghezza agenti sul filo centrale causate da ciascun filo posto ai vertici del rettangolo hanno intensità comune



$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_o I \cdot I_2}{2\pi c} = \frac{\mu_o I \cdot I_2}{2\pi\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}} = \mathbf{3.58*10^{-8}\ N/m}$$

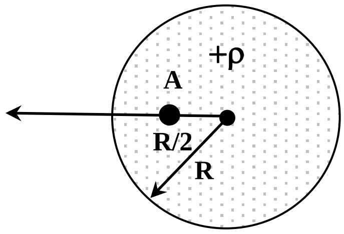
con direzione lungo la congiungente i fili

Nel caso mostrato in figura (a), dove sono raffigurati solo i fili ai vertici opposti del rettangolo, le forze si sommano $F^{(a)} = 2F$

Anche nel caso mostrato in figura (b) le forze si sommano $F^{(b)} = 2F$

La risultante delle forze giace quindi sull'asse x (in senso opposto) ed è di intensità $\frac{R}{L} = \frac{F^{(a)}}{L}\cos\beta + \frac{F^{(b)}}{L}\cos\beta = \frac{4F}{L}\cos\beta = \frac{4F}{L}\frac{a}{2c} = \mathbf{6.4*10^{-8}\ N/m}$

Integrazione di due esercizi solo ai fini del Secondo esonero



2. Testo. Data una sfera di raggio R=50 cm avente densità di carica volumetrica dipendente dal raggio $\rho=k_o+k_1r+k_2r^2$. Data una carica q=10μC, di massa m=100g posizionata nel punto interno A alla distanza R/2 dal centro della sfera. Assumendo che la carica q sia inizialmente ferma, determinarne, durante il suo moto di allontanamento, la velocità raggiunta quando esce dalla sfera [k_o=10μC/m^3, $k_1=k_o/R$, $k_2=k_o/R^2$],

2. Soluzione. Viene applicata la conser2vazione dell'energia meccanica nei punti A, B da cui $qV_A+0=qV_B+K_B$ (ove si è imposta l'energia cinetica iniziale nulla K_A=0) . Da questa condizione si ottiene l'espressione della velocità nel punto B; $w_B=\sqrt{2q(V_A-V_B)/m}$

Calcolo del potenziale V nel punto di partenza A e di arrivo B
Applicando la legge di Gauss per calcolare il flusso uscente da una sfera di raggio r<R si ottiene

$$\Phi_\Sigma=\iint_\Sigma \vec{E}_{\text{int}}\cdot\hat{n}dS=\left(4\pi r^2\right)E_{\text{int}}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}=\frac{\int_0^r\rho\left(4\pi r^2\right)dr}{\varepsilon_o}=\frac{4\pi\int_0^r\left(k_o+k_1r+k_2r^2\right)r^2dr}{\varepsilon_o}=\frac{4\pi\left(k_o\frac{r^3}{3}+k_1\frac{r^4}{4}+k_2\frac{r^5}{5}\right)}{\varepsilon_o}$$

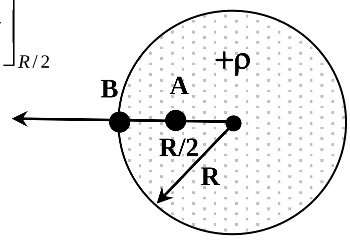
da cui il campo **elettrico interno** si calcola come $E_{\text{int}}=\left(k_o\frac{r}{3}+k_1\frac{r^2}{4}+k_2\frac{r^3}{5}\right)\frac{1}{\varepsilon_o}$

La differenza di potenziale fra i punti A e B si calcola come

$$V_A-V_B=\frac{1}{\varepsilon_o}\int_{R/2}^R\left(k_o\frac{r}{3}+k_1\frac{r^2}{4}+k_2\frac{r^3}{5}\right)dr=\frac{1}{\varepsilon_o}\left[k_o\frac{r^2}{6}+k_1\frac{r^3}{12}+k_2\frac{r^4}{20}\right]_{R/2}^R$$

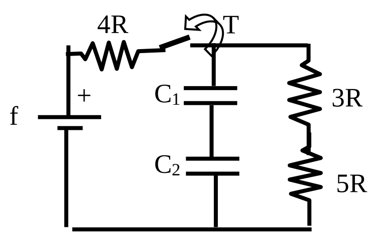
$$V_A-V_B=\frac{1}{\varepsilon_o}\left[k_o\frac{R^2-R^2/4}{6}+k_1\frac{R^3-R^3/8}{12}+k_2\frac{R^4-R^4/16}{20}\right]=\frac{3}{64}\frac{kR^4}{\varepsilon_o}$$

$$V_A-V_B=\frac{1}{\varepsilon_o}\left[k_o\frac{R^2}{8}+k_1\frac{7R^3}{96}+k_2\frac{3R^4}{64}\right]=\frac{47}{192}\frac{k_oR^2}{\varepsilon_o}$$



da cui la velocità raggiunta in B vale $w_B=\sqrt{47qk_oR^2/96m\varepsilon_o}$ **= 3.72 m/s**

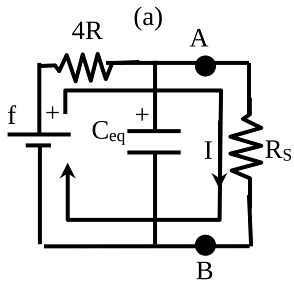
3. Testo. Supponendo che il circuito elettrico in figura sia lasciato in questa configurazione per un tempo sufficientemente lungo tale da far ritenere completato il processo di carica dei condensatori, determinare la carica presente sui condensatori. Determinare inoltre il tempo di scarica dei condensatori quando l'interruttore T viene aperto all'istante t=0. Dati: f=10V, R=5kΩ, C_1=3μF, C_2=1μF.



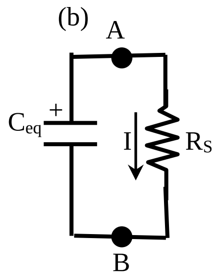
3. Soluzione. I condensatori nel ramo AB sono in serie ed equivalenti a $C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} =$ **0.75 μF.**

Le resistenze nel ramo AB sono in serie ed equivalenti a R_S=8R=**40 kΩ .**

Il circuito viene analizzato in due periodi distinti: prima (t<0) e dopo (t>0) l'apertura dell'interruttore



(a) Prima dell'apertura di T, sui condensatori non scorre corrente essendo completato il processo di carica. Nella maglia esterna una corrente I attraversa tutte le resistenze di valore complessivo R_{tot}=4R+R_S=12R, con intensità $I = f/R_{tot} = f/12R$.
La tensione sul condensatore equivalente coincide con la caduta ohmica sul ramo contiguo resistivo R_S di valore $\Delta V_c = V_A - V_B = IR_S = 2f/3 =$ **6.67 V.**



Su entrambi i condensatori C_1 e C_2 è presente la stessa carica $Q = C_{eq}\Delta V_c =$ **5 μC.**

(b) Quando il tasto T viene aperto il circuito si riduce ad un circuito RC in cui il condensatore equivalente si scarica con la costante di tempo $\tau = R_S C_{eq} =$ **30 ms**