FISICA

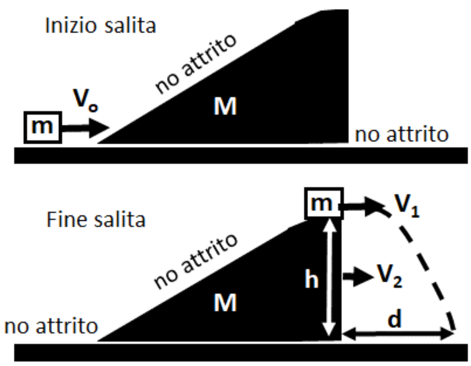
A.A. 2019-2020

Ingegneria Gestionale

3° appello del 17 Settembre 2020

Esame completo - Soluzioni

1. Un cuneo di massa **M=10 kg,** arrotondato agli estremi, è inizialmente fermo sopra un piano orizzontale, ma libero di muoversi senza attrito su di esso. Un blocco di massa **m=4 kg** inizialmente fermo alla base del cuneo viene lanciato alla velocità **V_o=4 m/s** lungo l'asse orizzontale salendo senza attrito lungo la diagonale del cuneo fino a raggiungere la sommità alla quota **h** con velocità **V_1** orizzontale e mettendo il cuneo in moto alla velocità **V_2=1 m/s** . Il blocco **m** quindi cade dal cuneo in moto impattando al suolo alla distanza **d** dal cuneo stesso. **Determinare**: l'altezza **h** del cuneo, la velocità **V_1** al momento della caduta e la distanza **d** blocco-cuneo al momento dell'impatto al suolo.



1. Soluzione. Durante la salita del blocco *m* lungo il pendio liscio del cuneo il blocco mette in moto il cuneo grazie ad uno scambio di reazioni vincolari interne al sistema blocco-cuneo. Le uniche forze esterne agenti sul sistema sono le rispettive forze peso e la reazione normale del piano. Essendo esse tutte dirette lungo la verticale, lungo l'asse orizzontale non vi sono forze esterne e **si conserva** la **componente orizzontale della quantità di moto del sistema** tra i due momenti riportati in figura: $p_{C,x}^{prima} = P_{C,x}^{dopo}$ ossiai $mV_o = MV_2 + mV_1$,

da cui si ricava la velocità del blocco prima della caduta $V_1 = V_o - \dfrac{MV_2}{m}$ **=1.5 m/s**

In assenza di attriti si conserva anche l'energia meccanica fra i due momenti riportati in figura: $E_m^{prima} = E_m^{dopo}$ ossia $\frac{1}{2}mV_o^2 = mgh + \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}mV_1^2$ da cui si ricava

l'altezza h **del cuneo** $h = \dfrac{V_0^2 - V_1^2 - V_2^2(M/m)}{2g}$ **= 57.4 cm.**

Quando il blocco si stacca dal cuneo esso cade per effetto della gravità secondo le equazioni

lungo x $\begin{cases} x = V_1 t \\ v_x = V_1 \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo y $\begin{cases} y = h - gt^2/2 \\ v_y = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$ il **tempo di volo** si ottiene annullando y=0

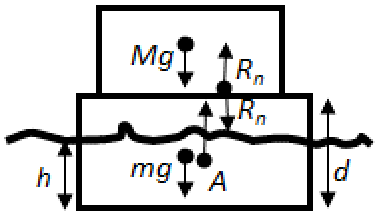
$t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ **=0.34 s** e la **posizione** in cui cade **il blocco è** $x_1 = V_1 t =$ **51.3 cm**

nel frattempo **il cuneo è avanzato di uno spazio** $x_2 = V_2 t =$ **34.2 cm**

e la distanza blocco-cuneo in quell'istante è data dalla differenza $d = x_1 - x_2 = (V_1 - V_2)t =$ **17.1 cm**

2. Un materassino di forma parallelepipeda con sezione S=2m^2 e spessore d=20cm completamente gonfio e di massa comprensiva della tela m=2kg viene posizionato in acqua. Un bambino di massa M si sdraia sulla sua sommità in modo da ricoprirne omogeneamente la superficie. Sapendo che passando dal mare alla piscina si verifica un aumento dello spessore della zona immersa Δh=5mm, a causa della diversa densità dell'acqua di mare δ*=1030 kg/m^3 rispetto a quella dell'acqua dolce δ=1000 kg/m^3, determinare la massa M del bambino. Determinare anche quale sia la massa massima che consenta ancora il galleggiamento del natante nei due ambienti: mare e piscina.

2. Soluzione



Il peso del bambino viene sostenuto dalla reazione normale del materassino R_n=Mg,

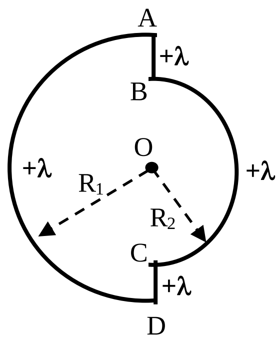
Applicando invece l'equilibrio delle forze agenti sul materassino si ha:
$A = Mg + R_n = (M+m)g$
dove la spinta di Archimede $A = \delta \cdot V_{imm} \cdot g = \delta \cdot S \cdot h_{imm} \cdot g$
è proporzionale allo spessore immerso del materassino che può essere esplicitato
per l'acqua dolce $h_{imm} = \frac{M+m}{S}\frac{1}{\delta}$ e per l'acqua di mare $h^*_{imm} = \frac{M+m}{S}\frac{1}{\delta^*}$
da cui la variazione di quota immersa

$$\Delta h = h_{imm} - h^*_{imm} = \frac{M+m}{S}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^*}\right)$$

e la **massa del bambino** $M = S \cdot \Delta h \cdot \frac{\delta \cdot \delta^*}{\delta^* - \delta} - m =$ **341 kg** **(**una massa certamente considerevole!**)**

La massa massima tollerabile in acqua dolce si ottiene imponendo h_{imm}=d da cui
$M_{max} = S \cdot d \cdot \delta - m =$ **398 kg**
La massa massima tollerabile in acqua di mare è $M^*_{max} = S \cdot d \cdot \delta^* - m =$ **410 kg**

3. Una carica Q è distribuita con densità lineica uniforme λ=10μC/m lungo una spira planare costituita da due semicirconferenze concentriche di raggio rispettivamente R_1=10 cm e R_2=8 cm raccordate dai due segmenti rettilinei AB ed CD lungo il diametro comune delle due circonferenze (anch'essi carichi). Determinare il potenziale ed il campo elettrico (in modulo direzione e verso) generati dalla distribuzione nel centro O.



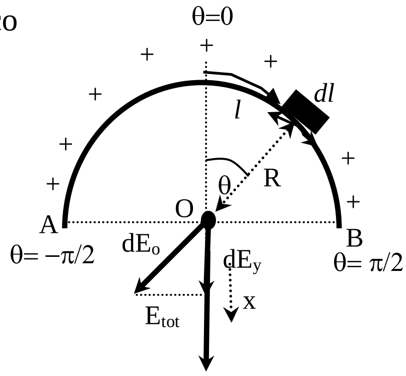
3. Soluzione. Campo elettrico e potenziale generato dalla semicirconferenza

La carica infinitesima *dq* disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima *dl*, genera nel punto *O* (alla distanza *R*) un contributo di campo elettrico

$$dE_o = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_o R}$$ diretto come in figura

La carica *dq* sull'arco si scrive come $dq=\lambda dl= \lambda R\, d\theta$.
Per ragioni di simmetria E_{tot} è tutto diretto lungo l'asse x,
tutti i contributi efficaci vanno proiettati lungo x : $dE_x = dE_o \cos\theta$ da cui

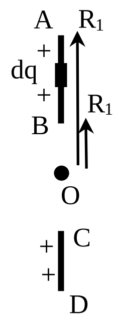
il **campo elettrico** $E_{tot} = \int dE_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}$



Più semplice il calcolo scalare del **potenziale**

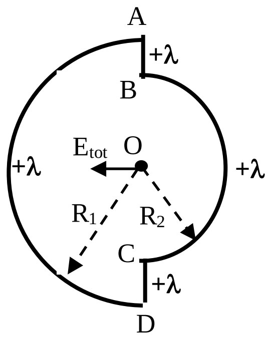
$$V_o = \int dV_o = \frac{\int dq}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\int \lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\lambda(\pi R)}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

Campo elettrico e potenziale generato dai tratti rettilinei



Il campo elettrico generato dai due tratti AB e CD si annulla in O che è il centro di simmetria. Mentre il potenziale generato dai due tratti vale:

$$V(O)=V_{AB}(O)+V_{CD}(O)=2V_{AB}=2\int_{R_2}^{R_1}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o x}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

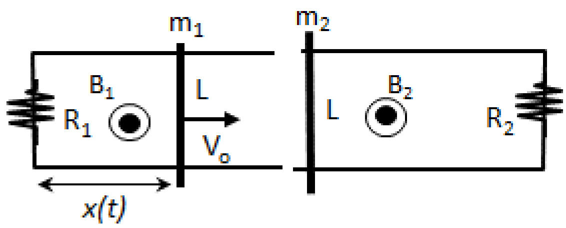


Il campo elettrico totale è dato dalla differenza dei campi elettrici generati dalle due circonferenze nella direzione in figura

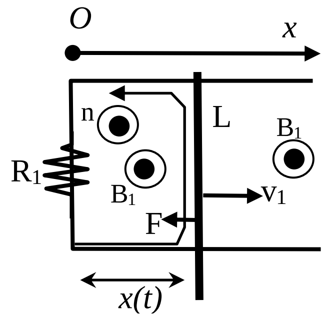
$$E_{tot}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R_2}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R_1}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{R_1-R_2}{R_1\cdot R_2}=\mathbf{4.5\cdot 10^5\ V/m}$$

Mentre **il potenziale totale in O** si ottiene sommando quello delle due circonferenze e dei tratti rettilinei

$$V(O)=\frac{\lambda}{4\varepsilon_o}+\frac{\lambda}{4\varepsilon_o}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)=\frac{\lambda}{2\varepsilon_o}\left(1+\frac{\ln(R_1/R_2)}{\pi}\right)=\mathbf{6.06\cdot 10^5\ V}$$



4. Due barrette metalliche di egual lunghezza L=20cm e di massa rispettivamente m_1=50g ed m_2=150g sono libere di spostarsi senza attriti lungo due guide metalliche separate da un piccolo spazio, ciascuna in modo da formare un circuito elettrico indipendente di forma rettangolare nel piano orizzontale con resistenze rispettivamente R_1=2Ω , R_2=3Ω, e soggetti a vettori induzione magnetica uniformi verticale di valore rispettivo B_1=1T e B_2=2T. La prima barretta viene lanciata alla velocità iniziale V_o=2m/s lungo l'asse x, e dopo un periodo di 2s urta centralmente ed elasticamente la seconda barretta mettendola in moto nel secondo circuito (la prima barretta torna indietro invece nel primo circuito). Determinare i valori delle velocità delle due barrette e delle intensità delle correnti nei due circuiti in due istanti: al momento dell'urto e dopo 3s. **Facoltativo:** determinare l'energia complessivamente dissipata dal primo e dal secondo circuito dopo che le barrette si fermano definitivamente.



4. Soluzione. Nel primo circuito dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira

$$\Phi_1=\int\vec{B}_1\cdot\hat{n}dS=\int B_1 dS=B_1\int_0^x dx\int_0^L dy=B_1 L\cdot x(t)$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_1=-\frac{d\Phi_1}{dt}=-B_1 L v_1$ che porta alla corrente indotta $i_1=\frac{f_1}{R_1}=-\frac{B_1 L v_1}{R_1}$ che è negativa (la corrente tende quindi a circolare in senso inverso rispetto a quella in figura).

Data la corrente indotta, i quattro lati del circuito subiranno delle forze attrattive di natura magnetica, in accordo alla seconda formula di Laplace $\vec{F} = i_1 \int d\vec{l} \times \vec{B}_1$

In particolare sull'unico lato mobile viene generata una forza frenante $F = i_1 L B_1 = B_1^2 L^2 v_1 / R_1$ contraria al moto (asse *x*) e proporzionale alla velocità della barra. Applicando il II principio della dinamica lungo l'asse del moto

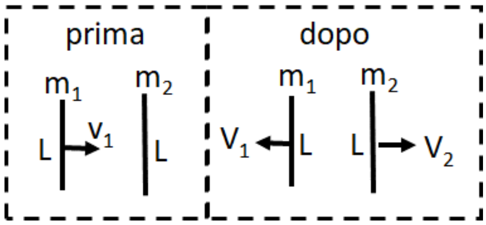
$$-F = -\frac{B_1^2 L^2}{R_1} v_1 = m_1 a = m_1 \frac{dv_1}{dt}$$

da cui si determina la **velocità della prima barretta** $v_1(t) = V_o \exp(-t/\tau_1)$ dove $\tau_1 = \frac{m_1 R_1}{B_1^2 L^2}$ =**2.5 s**

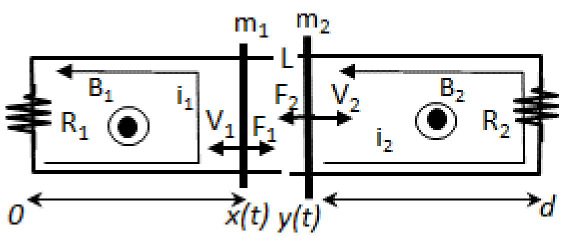
dopo Δt=2s immediatamente prima dell'urto ha **velocità** $v_1 = v(\Delta t) = V_o \exp(-\Delta t/\tau_1) =$ **0.9 m/s**

Urto elastico lungo lasse x. In queste condizioni si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica. Nel caso di urto lungo l'asse x le **velocità successive all'urto** delle due barre sono espresse in funzione della velocità poco prima dell'urto della prima barra v_1 come segue

$$\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 = -\dfrac{v_1}{2} = -0.45\, m/s \\ V_2 = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \dfrac{v_1}{2} = +0.45\, m/s \end{cases}$$



(la prima barra dopo l'urto inverte il moto)



Dopo l'urto le due correnti nei due circuito valgono

$$i_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{B_1 L}{R_1}\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{B_1 L V_1}{R_1}$$

(poiché V_1<0, la corrente diviene positiva e nel verso in figura)

$$i_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{B_2 L}{R_1}\frac{d}{dt}[d - y(t)] = \frac{B_2 L V_2}{R_2}$$ (la corrente è sempre nel verso in figura)

Le forze sulle due barrette sono entrambe frenanti e le **velocità successive all'urto** si riducono esponenzialmente secondo le leggi:

prima barretta $V_1 \exp(-t/\tau_1) = -\frac{v_1}{2}\exp(-t/\tau_1)$ dove $\tau_1 = \frac{m_1 R_1}{B_1^2 L^2}$ =**2.5 s** ; dopo 3s **V_1= -0.135 m/s**

seconda barretta $V_2 \exp(-t/\tau_2) = +\frac{v_1}{2}\exp(-t/\tau_2)$ dove $\tau_2 = \frac{m_2 R_2}{B_2^2 L^2}$ =**2.81 s** ; dopo 3s **V_2=0.155 m/s**

Le **correnti elettriche indotte** nei due circuiti sono date dalle espressioni

$$i_i(t) = -\frac{B_1 L \cdot V_1(t)}{R_1} = +\frac{B_1 L v_1}{2R_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$$; in t=0 si ha **i_1=45 mA;** dopo t=3s si ha **i_1=14 mA;**

$$i_2(t) = +\frac{B_2 L \cdot V_2(t)}{R_2} = +\frac{B_2 L v_1}{2R_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$$; in t=0 si ha **i_2=60 mA;** dopo t=3s si ha **i_2=21 mA;**

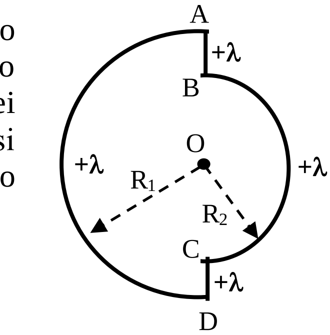
Facoltativo: l'energia cinetica inizialmente posseduta dalla seconda barra è integralmente dissipata nel secondo circuito: $E_2 = \frac{1}{2}m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 =$ **15 mJ**

L'energia dissipata nel primo circuito è prima dell'urto pari alla variazione della energia cinetica della barretta $E_1^{prima} = \frac{1}{2}m_1 V_0^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 =$ **80 mJ.** Dopo l'urto il primo circuito dissipa la restante parte $E_1^{dopo} = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 =$ **5 mJ,** e l'energia dissipata in totale $E_1^{prima} + E_1^{dopo} =$ **85 mJ**

FISICA

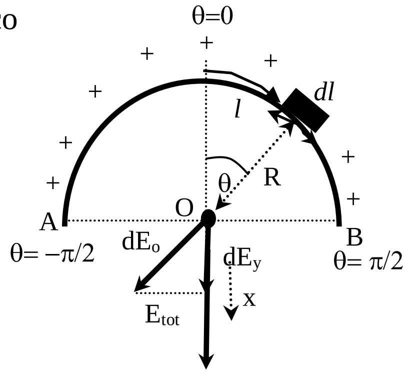
A.A. 2019-2020
Ingegneria Gestionale
3° appello del 17 Settembre 2020
Secondo esonero - Soluzioni

1. Una carica Q è distribuita con densità lineica uniforme λ=10μC/m lungo una spira planare costituita da due semicirconferenze concentriche di raggio rispettivamente R_1=10 cm e R_2=8 cm raccordate dai due segmenti rettilinei AB ed CD lungo il diametro comune delle due circonferenze (anch'essi carichi). Determinare il potenziale ed il campo elettrico (in modulo direzione e verso) generati dalla distribuzione nel centro O.



1. Soluzione. Campo elettrico e potenziale generato dalla semicirconferenza
La carica infinitesima *dq* disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima *dl*, genera nel punto *O* (alla distanza *R*) un contributo di campo elettrico

$$dE_o = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_o R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_o R}$$ diretto come in figura



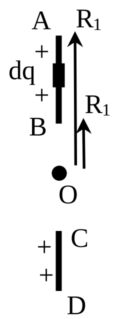
La carica *dq* sull'arco si scrive come $dq=\lambda dl= \lambda R\, d\theta$.
Per ragioni di simmetria E_{tot} è tutto diretto lungo l'asse x,
tutti i contributi efficaci vanno proiettati lungo x : $dE_x = dE_o \cos\theta$ da cui

il **campo elettrico** $E_{tot} = \int dE_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}$

Più semplice il calcolo scalare del **potenziale**

$$V_o = \int dV_o = \frac{\int dq}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\int \lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\lambda(\pi R)}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

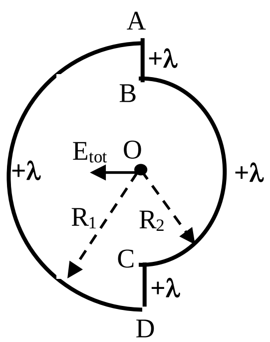
Campo elettrico e potenziale generato dai tratti rettilinei



Il campo elettrico generato dai due tratti AB e CD si annulla in O che è il centro di simmetria. Mentre il potenziale generato dai due tratti vale:

$$V(O) = V_{AB}(O) + V_{CD}(O) = 2V_{AB} = 2\int_{R_2}^{R_1} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Il campo elettrico totale è dato dalla differenza dei campi elettrici generati dalle due circonferenze nella direzione in figura

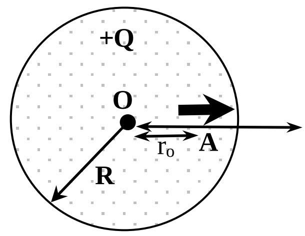


$$E_{tot} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R_2} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2} = \mathbf{4.5 \cdot 10^5\ V/m}$$

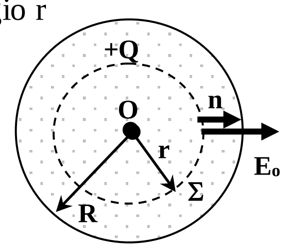
Mentre **il potenziale totale in O** si ottiene sommando quello delle due circonferenze e dei tratti rettilinei

$$V(O) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_o} + \frac{\lambda}{4\varepsilon_o} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_o}\left(1 + \frac{\ln(R_1/R_2)}{\pi}\right) = \mathbf{6.06 \cdot 10^5\ V}$$

2. Una carica Q=50 μC è distribuita con distribuzione a simmetria radiale con legge $\rho=kr^2$ all'interno di un cilindro di raggio R=25 cm. In un punto A interno alla sfera, distante r_o=20 cm dal centro O, è disposto un dipolo elettrico di momento $p=3\cdot10^{-9}$ Cm orientato nella direzione radiale come descritto in figura. Determinare l'intensità la direzione ed il verso della forza elettrica cui è sottoposto il dipolo.



2. Calcolo del campo elettrico della distribuzione
Dapprima si calcola il flusso di campo elettrico uscente da una sfera di raggio r concentrica alla distribuzione data $\Phi_\Sigma(E_o)=\iint_\Sigma \vec{E}_o\cdot\hat{n}dS=E_o(4\pi r^2)$



Applicando la legge di Gauss quando la superficie Σ risulta interna (r<R)

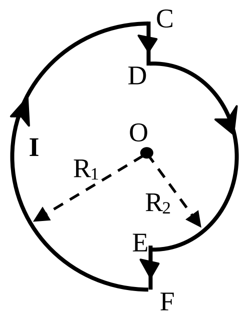
$$\Phi_{\Sigma\text{int}}=E_{o\text{int}}(4\pi r^2)=\frac{\int_0^r \rho dV}{\varepsilon_o}=\frac{\int_0^r kr^2(4\pi r^2)dr}{\varepsilon_o}=\frac{4\pi kr^5}{5\varepsilon_o}$$

da cui $E_{o\text{int}}=\frac{k}{5\varepsilon_o}r^3=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r^3}{R^5}$ essendo $Q=\int_0^R kr^2(4\pi r^2)dr=\frac{4\pi kR^5}{5}$

La forza agente su di un dipolo disposto internamente nel punto A vale

$\vec{F}=-\nabla U_{dipolo}=-\nabla\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}_o\right)=\nabla\left(\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_o R^5}r^3\right)$ da cui $F_r=\frac{3Qp}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r_o^2}{R^5}=$ **0.166 N** (verso l'esterno)

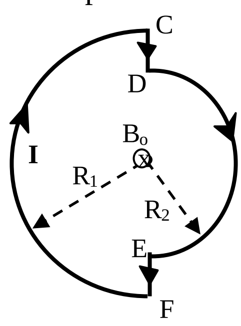
3. Il circuito elettrico mistilineo CDEF descritto in figura è percorso da una corrente continua I=20 mA circolante in senso orario. Sapendo che i tratti DE ed FC sono semicirconferenze concentriche rispettivamente di raggi R_1=10 cm, R_2=8 cm e che i tratti CD ed EF sono segmenti facenti parte del diametro della prima semicirconferenza, determinare il vettore induzione magnetica nel centro O.



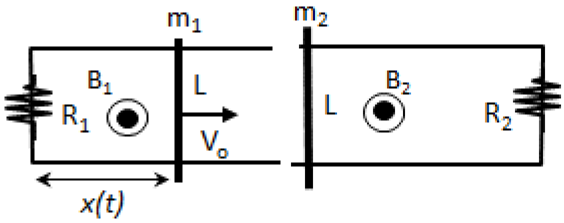
3. Soluzione. Dalla 2° formula di Laplace si evince che nel centro O il contributo elementari dei tratti CD ed EF è nullo $d\vec{B}_o=\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)Id\vec{l}\times\frac{\vec{r}}{r^3}$=0 perchè $d\vec{l}\,//\,\vec{r}$. Sugli archi DE ed FC poichè $d\vec{l}\perp\vec{r}$, i contributi elementari hanno valore $dB_o=\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{Idl}{r^2}$ con direzione ortogonale al piano del foglio e verso uscente. Integrando tali contributi sulle 2 semicirconferenze si ottiene

$B_{DE}=\int_D^E dB_o=\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I}{R_2^3}\int_D^E dl=\left(\frac{\mu_o I}{4\pi R_2^2}\right)\pi R_2=\frac{\mu_o I}{4R_2}$ e analogamente $B_{FC}=\frac{\mu_o I}{4R_1}$

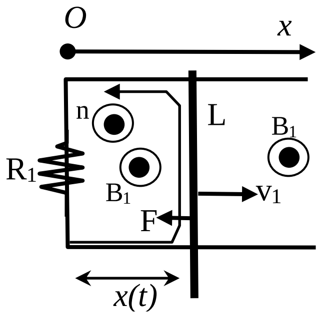
il vettore induzione magnetica è $B_o=B_{DE}+B_{FC}=\frac{\mu_o I}{4}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=$ **1.41· 10^{-7} T**



4. Due barrette metalliche di egual lunghezza L=20cm e di massa rispettivamente m_1=50g ed m_2=150g sono libere di spostarsi senza attriti lungo due guide metalliche separate da un piccolo spazio, ciascuna in modo da formare un circuito elettrico indipendente di forma rettangolare nel piano orizzontale con resistenze rispettivamente $R_1=2\Omega$, $R_2=3\Omega$, e soggetti a vettori induzione magnetica uniformi verticale di valore rispettivo B_1=1T e B_2=2T. La prima barretta viene lanciata alla velocità iniziale V_o=2m/s lungo l'asse x, e dopo un periodo di 2s urta centralmente ed elasticamente la seconda barretta mettendola in moto nel secondo circuito (la prima barretta torna indietro invece nel primo circuito). Determinare i valori delle velocità delle due barrette e delle intensità delle correnti nei due circuiti in due istanti: al momento dell'urto e dopo 3s. **Facoltativo:** determinare l'energia complessivamente dissipata dal primo e dal secondo circuito dopo che le barrette si fermano definitivamente.



4. Soluzione. Nel primo circuito dopo aver scelto una opportuna orientazione della corrente in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, si calcola il flusso concatenato con la spira



$$\Phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS = \int B_1 dS = B_1 \int_0^x dx \int_0^L dy = B_1 L \cdot x(t)$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz si calcola la forza elettromotrice indotta nella spira $f_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -B_1 L v_1$ che porta alla corrente indotta $i_1 = \frac{f_1}{R_1} = -\frac{B_1 L v_1}{R_1}$ che è negativa (la corrente tende quindi a circolare in senso inverso rispetto a quella in figura).

Data la corrente indotta, i quattro lati del circuito subiranno delle forze attrattive di natura magnetica, in accordo alla seconda formula di Laplace $\vec{F} = i_1 \int d\vec{l} \times \vec{B}_1$

In particolare sull'unico lato mobile viene generata una forza frenante $F = i_1 L B_1 = B_1^2 L^2 v_1 / R_1$ contraria al moto (asse *x*) e proporzionale alla velocità della barra. Applicando il II principio della dinamica lungo l'asse del moto

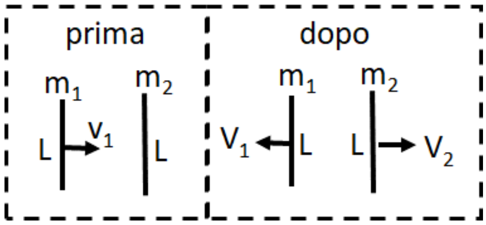
$$-F = -\frac{B_1^2 L^2}{R_1} v_1 = m_1 a = m_1 \frac{dv_1}{dt}$$

da cui si determina la **velocità della prima barretta** $v_1(t) = V_o \exp(-t/\tau_1)$ dove $\tau_1 = \frac{m_1 R_1}{B_1^2 L^2}$ =**2.5 s**

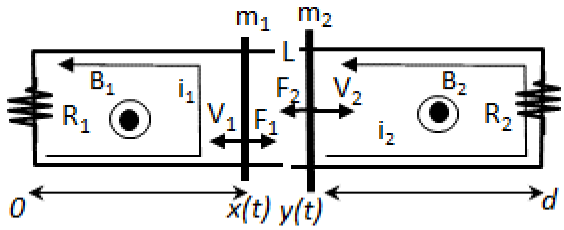
dopo Δt=2s immediatamente prima dell'urto ha **velocità** $v_1 = v(\Delta t) = V_o \exp(-\Delta t/\tau_1) =$ **0.9 m/s**

Urto elastico lungo lasse x. In queste condizioni si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica. Nel caso di urto lungo l'asse x le **velocità successive all'urto** delle due barre sono espresse in funzione della velocità poco prima dell'urto della prima barra v_1 come segue

$$\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 = -\dfrac{v_1}{2} = -0.45\, m/s \\ V_2 = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \dfrac{v_1}{2} = +0.45\, m/s \end{cases}$$



(la prima barra dopo l'urto inverte il moto)



Dopo l'urto le due correnti nei due circuito valgono

$$i_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{B_1 L}{R_1}\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{B_1 L V_1}{R_1}$$

(poiché $V_1<0$, la corrente diviene positiva e nel verso in figura)

$$i_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{B_2 L}{R_1}\frac{d}{dt}\left[d - y(t)\right] = \frac{B_2 L V_2}{R_2}$$ (la corrente è sempre nel verso in figura)

Le forze sulle due barrette sono entrambe frenanti e le **velocità successive all'urto** si riducono esponenzialmente secondo le leggi:

prima barretta $V_1 \exp(-t/\tau_1) = -\dfrac{v_1}{2}\exp(-t/\tau_1)$ dove $\tau_1 = \dfrac{m_1 R_1}{B_1^2 L^2}$ =**2.5 s** ; dopo 3s **V_1= -0.135 m/s**

seconda barretta $V_2 \exp(-t/\tau_2) = +\dfrac{v_1}{2}\exp(-t/\tau_2)$ dove $\tau_2 = \dfrac{m_2 R_2}{B_2^2 L^2}$ =**2.81 s** ; dopo 3s **V_2=0.155 m/s**

Le **correnti elettriche indotte** nei due circuiti sono date dalle espressioni

$i_i(t) = -\dfrac{B_1 L \cdot V_1(t)}{R_1} = +\dfrac{B_1 L v_1}{2R_1}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_1}\right)$; in t=0 si ha **$i_1$=45 mA;** dopo t=3s si ha **i_1=14 mA;**

$i_2(t) = +\dfrac{B_2 L \cdot V_2(t)}{R_2} = +\dfrac{B_2 L v_1}{2R_2}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_2}\right)$; in t=0 si ha **$i_2$=60 mA;** dopo t=3s si ha **i_2=21 mA;**

Facoltativo: l'energia cinetica inizialmente posseduta dalla seconda barra è integralmente dissipata nel secondo circuito: $E_2 = \dfrac{1}{2}m_2 V_2^2 = \dfrac{1}{2}m_2\left(\dfrac{v_1}{2}\right)^2 = \mathbf{15\ mJ}$

L'energia dissipata nel primo circuito è prima dell'urto pari alla variazione della energia cinetica della barretta $E_1^{prima} = \dfrac{1}{2}m_1 V_0^2 - \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2 = \mathbf{80\ mJ.}$ Dopo l'urto il primo circuito dissipa la restante parte $E_1^{dopo} = \dfrac{1}{2}m_1 V_1^2 = \dfrac{1}{2}m_1\left(\dfrac{v_1}{2}\right)^2 = \mathbf{5\ mJ,}$ e l'energia dissipata in totale $E_1^{prima} + E_1^{dopo} = \mathbf{85\ mJ.}$