



FISICA

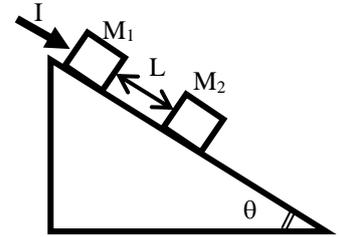
A.A. 2021-2022

Ingegneria Gestionale

3° appello del 14 settembre 2022

Esame completo

1. Testo. Due blocchi di massa $M_1=1$ kg ed $M_2=3$ kg sono disposti lungo un piano inclinato liscio inclinato di $\theta=30^\circ$ rispetto all'orizzontale in posizioni iniziali distanziate di $L=40$ cm. All'istante $t=0$ il blocco sottostante M_2 è inizialmente fermo per poi scivolare verso il basso per gravità, mentre sul blocco soprastante M_1 viene applicato l'impulso I per potenziare il suo scivolamento. Essendo in queste condizioni inevitabile l'urto fra i due blocchi (supposto elastico), determinare per quale valore dell'impulso il blocco M_1 dopo l'urto arresta momentaneamente il suo scivolamento. Determinare inoltre in quale istante avviene l'urto.

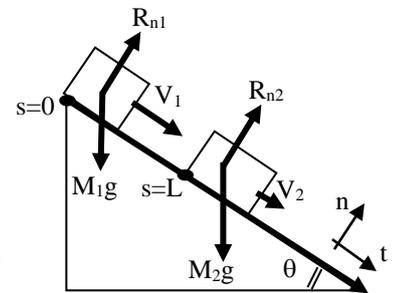


1. Soluzione. Studio delle forze sui singoli blocchi

Blocco M_1 sul quale viene applicato l'impulso

Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t, n

$$\begin{cases} t) \left\{ \begin{aligned} M_1 g \sin \theta &= M_1 a \\ n) \left\{ \begin{aligned} R_{n1} &= M_1 g \cos \theta \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad \text{da cui le grandezze cinematiche} \end{cases} \begin{cases} a_1 = g \sin \theta \\ v_1 = \frac{I}{M_1} + g \cdot t \cdot \sin \theta \\ s_1 = \frac{I}{M_1} t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \cdot \sin \theta \end{cases}$$



Blocco M_2

Scomponendo tutte le forze agenti lungo gli assi t, n

$$\begin{cases} t) \left\{ \begin{aligned} M_2 g \sin \theta &= M_2 a \\ n) \left\{ \begin{aligned} R_{n2} &= M_2 g \cos \theta \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad \text{da cui le grandezze cinematiche} \end{cases} \begin{cases} a_2 = g \sin \theta \\ v_2 = g \cdot t \cdot \sin \theta \\ s_2 = L + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \cdot \sin \theta \end{cases}$$

I due blocchi urtano quando $s_1=s_2$ al tempo $\frac{I}{M_1} t = L$ da cui $t^* = \frac{M_1 L}{I}$ (1)

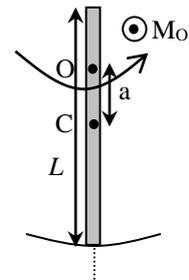
Mentre i due blocchi discendono il piano inclinato a velocità differenti il blocco M_1 urta elasticamente M_2 e subisce un cambio della velocità. La velocità dopo l'urto del blocco M_1 si ottiene applicando il principio di conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia secondo l'espressione (dalla quale poi imporre la condizione $V_1^*=0$)

$$\begin{aligned} V_1^* &= \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) v_1 + \left(\frac{2M_2}{M_1 + M_2} \right) v_2 = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \left(\frac{I}{M_1} + g t^* \sin \theta \right) + \left(\frac{2M_2}{M_1 + M_2} \right) (g t^* \sin \theta) = \\ &= g t^* \sin \theta + \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{I}{M_1} = \frac{g M_1 L}{I} \sin \theta + \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{I}{M_1} = 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava l'impulso necessario $I = \sqrt{gL \sin \theta \left(M_1^2 \frac{M_1 + M_2}{M_2 - M_1} \right)} = 1.98 \text{ kg m/s} \quad (2)$

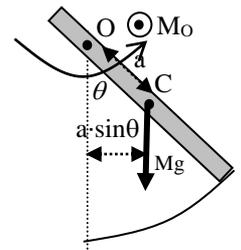
L'istante dell'urto si calcola combinando la (1) con la (2) $t^* = \frac{M_1 L}{I} = \sqrt{\frac{L}{g \sin \theta} \left(\frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \right)} = 0.202 \text{ s}$

2. Testo. Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa $M=2\text{kg}$, di lunghezza $L=40 \text{ cm}$, libera di ruotare intorno al cardine O alla distanza $a=15 \text{ cm}$ dal centro di massa C . Quando dalla posizione iniziale in verticale viene applicato un momento esterno costante $M_o=0.205 \text{ Nm}$, rispetto all'asse in O , il pendolo comincia ad oscillare intorno ad una nuova posizione di equilibrio. Determinare l'angolo rispetto alla verticale della nuova posizione di equilibrio ed il periodo delle piccole oscillazioni. [Il momento di inerzia rispetto all'asse per il cardine O vale: $I_o = mL^2/12 + ma^2$]



2. Soluzione.

Quando il pendolo composto è fuori dalla sua posizione di equilibrio, il momento della forza esterna tende a far ruotare il sistema in senso antiorario intorno al cardine O , mentre il momento della forza peso tende ad imprimere una rotazione retroattiva sempre rivolta a far tornare il sistema nella posizione in verticale



Applichiamo quindi la seconda equazione cardinale $M_o^{ext} = I_o \frac{d^2\theta}{dt^2}$

dove sono presenti i due momenti $M_o^{ext} = M_o - mga \sin \theta = I_o \frac{d^2\theta}{dt^2}$

L'equazione differenziale del II ordine non lineare non omogenea diviene quindi

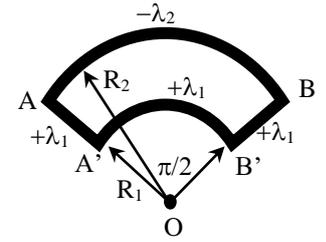
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{I_o} \sin \theta = \frac{M_o}{I_o} \quad \text{che per } |\theta| < \pi/15 \text{ può essere linearizzata in } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mga}{I_o} \right) \theta = \frac{M_o}{I_o}$$

Essa ammette una **nuova posizione di equilibrio** $\theta_{eq} = \arcsin \left(\frac{M_o}{mga} \right) = 0.07 \text{ rad} = 4^\circ$

(che si ottiene come soluzione particolare statica annullando la derivata temporale)

Le oscillazioni avvengono intorno a θ_{eq} con il **periodo** $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{L^2/12 + a^2}{g \cdot a}} = 0.98 \text{ s}$.

3. Testo. La distribuzione di carica illustrata in figura viene distribuita sul bordo esterno della corona semicircolare AA'B'B di centro O, di raggio esterno $R_2=8$ cm, di raggio interno $R_1=4$ cm e di apertura angolare $\Delta\theta=\pi/2$. In particolare sui bordi rettilinei AA' e BB' e sull'arco interno A'B' è distribuita la carica positiva con medesima densità lineica uniforme $+\lambda_1=10\mu\text{C/m}$, mentre sull'arco AB è distribuita una carica negativa con densità lineica uniforme $-\lambda_2$. Sapendo che il campo elettrico nel centro O si annulla determinare il valore assoluto della densità λ_2 .



3. Soluzione. Campo elettrico generato dagli archi di circonferenza

La carica infinitesima dq disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima $dl=R_1d\theta$ dell'arco A'B', genera nel punto O (alla distanza R_1) un contributo di campo elettrico $dE_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{\lambda_1 R_1 d\theta}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} d\theta$ diretto come in

figura. Analogamente assumendo per ragioni di simmetria il vettore risultante E_1 tutto diretto lungo l'asse delle y (nello stesso senso) si conviene di proiettare il contributo efficace di campo elettrico lungo l'asse y

$$dE_{1,y} = dE_1 \cos \theta \quad (\text{lungo asse } y)$$

per poi integrarlo su tutta la distribuzione sulla semicirconferenza

$$E_1 = \int dE_{1,y} = + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\lambda_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R_1} d\theta = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} [\sin \theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad (\text{Eq.1})$$

Analogo calcolo può essere effettuato sull'arco AB che genera un contributo E_2 con il verso opposto all'asse y a causa del segno negativo della distribuzione di carica

I due campi E_1 ed E_2 forniscono complessivamente $E_1 + E_2 = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda_1}{R_1} - \frac{\lambda_2}{R_2} \right)$ Eq.(2)

Campo elettrico generato dai tratti rettilinei

Il campo elettrico E_3 generato dal tratto rettilineo radiale AA' nel punto O rimane certamente lungo la radiale nella direzione del tratto AA' e si calcola partendo dalla carica elementare $dq=\lambda_1 dr$ che genera nel punto O il contributo elementare

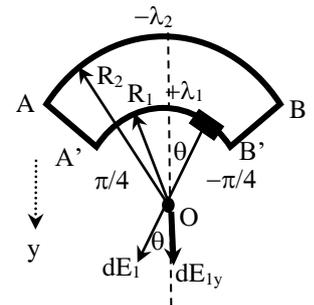
$$dE_3 = \frac{\lambda_1 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{che integrata porta}$$

$$E_3 = \int dE_3 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \right]$$

Ripetendo lo stesso ragionamento sul tratto BB' si ottiene un analogo contributo E_4

Disposto simmetricamente rispetto all'asse y . Sommando vettorialmente i due contributi E_3 ed E_4 ed applicando la regola del parallelogramma (in questo caso un quadrato) si ottiene il contributo complessivo dei due tratti rettilinei $E_{\text{tot}3,4}$ disposto anch'esso lungo l'asse y

$$E_{\text{tot}3,4} = |\vec{E}_3 + \vec{E}_4| = \sqrt{2}E_3 = \sqrt{2} \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \right] \quad \text{Eq.(3)}$$

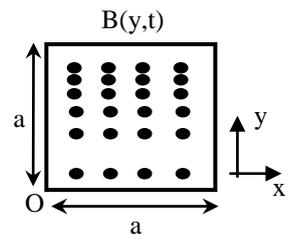


Sommando ora tutti i contributi (2) e (3) ed imponendo nullo il campo si ottiene:

$$E_1 + E_2 + E_{tot3,4} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda_1}{R_1} - \frac{\lambda_2}{R_2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0} \lambda_1 \left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \right] = 0$$

da cui $\frac{\lambda_2}{R_2} = \lambda_1 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \right] = \lambda_1 \left[\frac{2R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \right]$ e quindi $\lambda_2 = \lambda_1 \left(\frac{2R_2}{R_1} - 1 \right) = 3\lambda_1 = 30 \mu\text{C/m}$

4. Testo . Una spira metallica quadrata di lato $a=10\text{cm}$ di resistenza elettrica $R=25\Omega$ per ciascun lato è investita da un campo magnetico non uniforme variabile nello spazio e nel tempo con legge $B(y,t) = A \cdot t \cdot y \cdot \exp(-t/\sigma)$ dove $\sigma=100\text{ms}$ ed $A=2 \text{ T/m}$, (l'origine del sistema di coordinate è nel punto O) in modo che il campo magnetico risulti ortogonale alla giacitura xy della spira, come indicato in figura. Calcolare le espressioni della forza elettromotrice e della corrente indotta nella spira dopo $t=200\text{ms}$. Determinare inoltre le forze agenti su ciascun lato dopo $t=200\text{ms}$.



4. Soluzione. Data l'orientazione scelta per la corrente circolante nella spira, la normale alla spira \hat{n} ha la stessa direzione e verso di \vec{B} . Il flusso concatenato con la spira è quindi Φ_c :

$$\Phi_c = \iint \vec{B} \cdot \hat{n} dx dy = A t \exp\left(-\frac{t}{\sigma}\right) \cdot \int_0^a dx \int_0^a y \cdot dy = A \frac{a^3}{2} t \cdot \exp\left(-\frac{t}{\sigma}\right)$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz

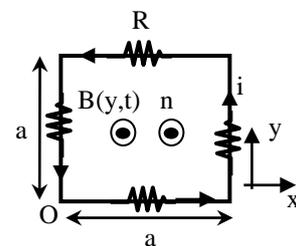
Si ottiene la **forza elettromotrice indotta** nella spira

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{Aa^3}{2} \frac{d}{dt} \left[t \cdot \exp\left(-\frac{t}{\sigma}\right) \right] = \frac{Aa^3}{2} \left(\frac{t}{\sigma} - 1 \right) \exp\left(-\frac{t}{\sigma}\right).$$

e l'**intensità di corrente indotta** nel circuito

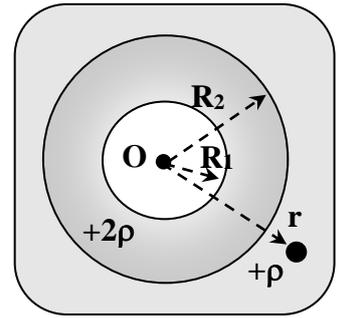
$$i = \frac{f_i}{4R} = \frac{Aa^3}{8R} \left(\frac{t}{\sigma} - 1 \right) \exp\left(-\frac{t}{\sigma}\right).$$

Dopo $t^*=200 \text{ ms}$ la **f.e.m. indotta** vale $f_i(t^*) = 135 \mu\text{V}$, e la **corrente indotta** $i(t^*) = 1.35 \mu\text{A}$



Integrazione di due esercizi solo ai fini del secondo esonero

Integrazione 2. Testo. Una distribuzione di carica è costituita da una sfera di raggio $R_2 = 30\text{cm}$ centrata in O uniformemente carica con densità di volume $+2\rho$ nella quale è ricavata una cavità sferica concentrica di raggio R_1 . All'esterno per $r > R_2$ c'è infine una regione di spazio con densità volumetrica uniforme di carica $+\rho$. Determinare per quale valore del raggio interno R_1 , il campo elettrico nel punto r coinciderebbe con il campo elettrico prodotto nello stesso punto da una singola sfera uniformemente carica con densità $+\rho$.



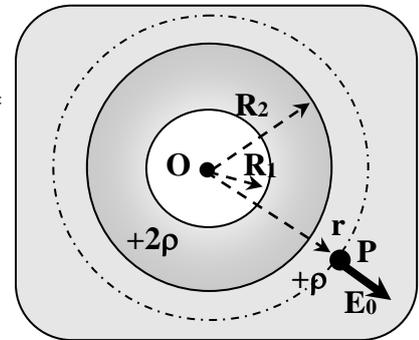
Integrazione 2. Soluzione.

Il campo elettrico nel punto P si può determinare applicando la legge di Gauss alla sfera di raggio r

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}_o) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_o} = \frac{\int \rho d\tau}{\epsilon_o} = \frac{V_{2\rho}(2\rho) + V_{\rho}(\rho)}{\epsilon_o} = \frac{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)(2\rho) + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_2^3)(\rho)}{\epsilon_o}$$

da cui nel punto P vale:
$$E_o(r) = \frac{2(R_2^3 - R_1^3) + (r^3 - R_2^3)}{3\epsilon_o r^2} \rho = \frac{R_2^3 - 2R_1^3 - r^3}{3\epsilon_o r^2} \rho =$$

$$E_o(r) = \rho \frac{R_2^3 - 2R_1^3}{3\epsilon_o r^2} + \frac{\rho}{3\epsilon_o} r$$



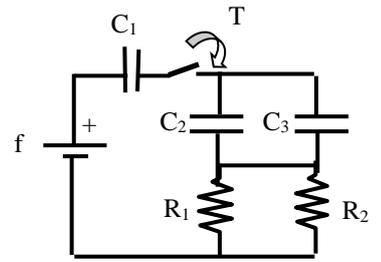
Nel secondo caso, usato per confronto, di una sfera uniformemente carica con densità $+\rho$

il campo elettrico nello stesso punto P varrebbe $E_{ref}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_o} r$

Imponendo $E_o(r) = E_{ref}(r)$ si ottiene necessariamente che

$$R_2^3 = 2R_1^3 \quad \text{da cui si ricava il valore del raggio interno della cavità } R_1 = R_2 / \sqrt[3]{2} = 23.8 \text{ cm}$$

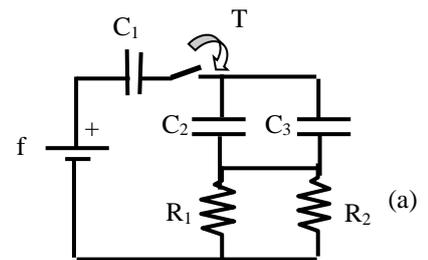
Integrazione 3. Testo. Determinate l'andamento della corrente nel condensatore C_1 dal momento in cui l'interruttore T viene chiuso in $t=0$. Determinate anche la carica presente sul condensatore C_1 dopo un tempo $t=1\text{ms}$ dalla chiusura assumendo che la carica iniziale di tutti i condensatori sia nulla al tempo $t=0$. [$f=10\text{V}$, $R_1=4.5\text{ k}\Omega$, $R_2=1.5\text{ k}\Omega$, $C_1=0.25\text{ }\mu\text{F}$, $C_2=0.5\text{ }\mu\text{F}$, $C_3=1.5\text{ }\mu\text{F}$]



Integrazione 3. Soluzione. Il circuito (a) può essere semplificato con i circuiti via via più elementari (b), (c).

Nel circuito (b) i valori delle resistenza equivalente parallelo R_{eq} , e della capacità equivalente parallelo C_{eq1} sono dati dalle formule

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1.125\text{ k}\Omega, \quad C_{eq1} = C_2 + C_3 = 2\text{ }\mu\text{F}$$



Nel circuito (c) il valore della capacità equivalente serie C_{eq2} e del tempo di carica del circuito RC sono dati dalle formule

$$C_{eq2} = \frac{C_1 \cdot C_{eq1}}{C_1 + C_{eq1}} = 0.222\text{ }\mu\text{F}, \quad \tau = R_{eq} C_{eq2} = 0.25\text{ ms}$$

L'espressione della **corrente erogata** dalla batteria nel circuito (a) coincide con la corrente di carica nel circuito (c)

$$i(t) = i_{\max} \exp[-t/\tau] \quad \text{dove} \quad i_{\max} = \frac{f}{R_{eq2}} = 8.89\text{ mA}$$

I condensatori C_1 e C_{eq1} sono in serie. La carica su C_1 è uguale alla carica su C_{eq2} che si ricava dall'**espressione della carica q_{C1}**

$$q_{C1}(t) = q_{C_{eq2}}(t) = f C_{eq2} \{1 - \exp[-t/\tau]\} \quad \text{e quindi} \quad q_{C1} = 2.182\text{ }\mu\text{C}$$

