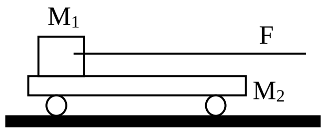
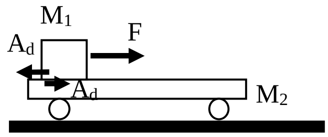
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA 12 CFU
A.A. 2013-2014
Ingegneria Gestionale (M-Z)
4° Appello del 16 Gennaio 2015



1. Una cassa di massa M_1=20kg è in quiete sopra un carrello di massa M_2=40kg dotato di ruote libero di muoversi senza attrito sul pavimento. Volendo spostare la cassa viene applicata su di essa, tramite una fune, una forza orizzontale di F=100 N. Ma tra la cassa ed il carrello esiste una forza di attrito con coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.2. Determinare con che accelerazione si fmuove la cassa, e con quale accelerazione si muove il carrello.
Facoltativo: se la casa dista 150 cm dal bordo anteriore del carrello, calcolare dopo quanti secondi la cassa cade fuori dal carrello.

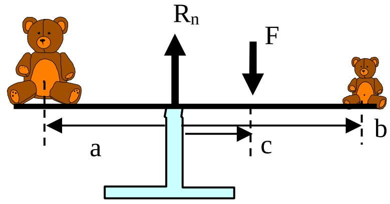


1. Studio delle forze in orizzontale :oltre alla forza F che è applicata sulla massa M_1 è anche presente una forza di attrito dinamica di valore $A_d=\mu_d R_n=\mu_d M_1 g$ (compare solo la massa del corpo soprastante)
che agisce bilateralmente (per il III principio della dinamica) sulla la cassa M1 nella direzione opposta al moto, sia sul carrello M2 a metterlo in movimento

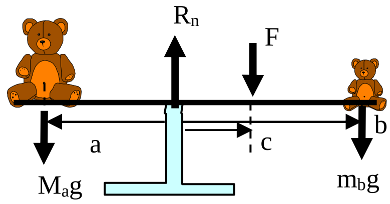
Sulla massa M_1: $F - A_d = M_1 \cdot a_1$ da cui $a_1 = \dfrac{F - A_d}{M_1} = \dfrac{F - \mu_d M_1 g}{M_1} = \mathbf{3.04\ m/s^2}$

Sul carrello M_2: $A_d = M_2 \cdot a_2$ da cui $a_2 = \dfrac{\mu_d M_1 g}{M_2} = \mathbf{0.98\ m/s^2}$

Facoltativo: il movimento relativo tra la cassa e il carrello avviene con l'accelerazione differenza a_1-a_2=**2.06 m/s²** . Il tempo per percorrere la distanza L=1.50 m e cadere dal carrello si ottiene da $t = \sqrt{2(a_1 - a_2)L} = \mathbf{2.49\ s}$



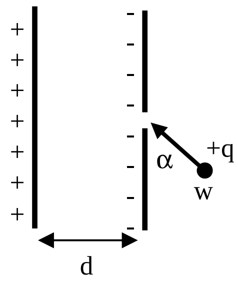
2. Un dondolo è costituito da una barra incernierata sul fulcro. Un grande orso di massa M_a=50 kg è posizionato sul lato sinistro a distanza a=50cm dal fulcro. Sul lato destro come contrappeso è posto un orsetto di massa m_b=10 kg a distanza b=2m dal fulcro. Per equilibrare il dondolo deve essere applicata una forza addizionale F alla distanza c=30cm dal fulcro. Determinare il valore di tale forza F. Determinare anche la forza che deve sostenere la base di appoggio sul fulcro.



2. Per la statica del dondolo è necessario che siano contemporaneamente nulle le due equazioni cardinali $\begin{cases} F = 0 \\ M = 0 \end{cases}$ (il momento viene calcolato per semplicità rispetto ad un asse per il fulcro) da cui

$$\begin{cases} R_n - M_A g - m_B g - F = 0 \\ M_a g a - m_b g b - Fc = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} R_n = (M_a + m_b) g + F = 751N \\ F = \dfrac{M_a a - m_b b}{c} g = 163N \end{cases}$$

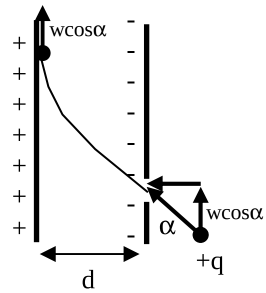
3. La differenza di potenziale applicata ai capi di un condensatore piano è ΔV=300V quando la distanza fra le armature d=10 cm. Sull'armatura negativa è praticato un piccolo foro circolare tale da non perturbare le proprietà elettriche del sistema e da consentire l'ingresso di una carica +q=20μC e di massa m=1g che entra in una direzione inclinata di un angolo α=30° rispetto al piano dell'armatura negativa. Determinare per quale velocità iniziale di lancio la carica riesce a raggiungere l'armatura positiva ed in quanto tempo dall'istante in cui passa per il foro.



3. Conservazione energia meccanica

L'energia meccanica iniziale della carica è : $\frac{1}{2}mw^2 + qV^-$

(V^- è il potenziale sull'armatura negativa)



L'energia meccanica nel punto di arrivo sulla piastra : $\frac{1}{2}m(w\cos\alpha)^2 + qV^+$

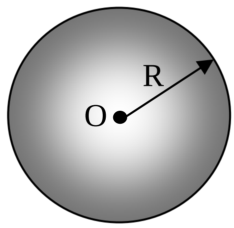
(sull'armatura positiva la carica giunge con una velocità solo tangenziale $w\cdot\cos\alpha$)

Dalla conservazione dell'energia $\frac{1}{2}m(w\cos\alpha)^2 + qV^+ = \frac{1}{2}mw^2 + qV^-$

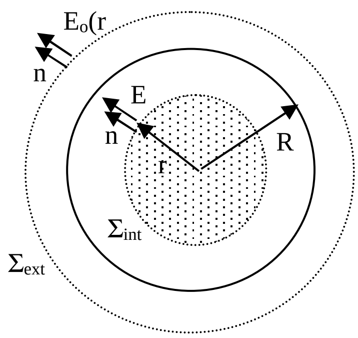
$$q(V^+ - V^-) = \frac{1}{2}mw^2 - \frac{1}{2}mw^2\cos^2\alpha = \frac{1}{2}mw^2 sen^2\alpha$$

si ottiene il valore della velocità minima per raggiungere lo strato positivo $w_{\min} = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}\frac{1}{sen\alpha} =$ **6.93 m/s**

4. Sia data una sfera di centro in O e di raggio R disposta nel vuoto. All'interno di tale sfera sia distribuita una carica con densità volumetrica non uniforme in accordo alla legge $\rho(r) = A + Br$ dove r rappresenta la distanza del generico punto dal centro O. Calcolare per quale valore del parametro B il campo elettrico $E_o(r)$ nel punto interno r=R/2 eguaglia il campo elettrico nel punto sterno in r=4R . [Dati: R=1m, A=10μC/m^3]



4. Per la simmetria del problema il campo elettrico *$E_o(r)$* è radiale e può essere calcolato applicando la legge di Gauss. Per i punti interni che si trovano sulla superficie Σ_{int} di raggio *$r<R$*, il flusso uscente da Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma int} = \int_{\Sigma int} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere Q_{int}/ε_o, dove il valore della carica interna alla superficie Σ_{int} vale



$$Q_{int} = \int \rho dV = \int_0^r \rho(4\pi r^2 dr) = 4\pi\int_0^r (Ar^2 + Br^3)dr = 4\pi\left(\frac{Ar^3}{3} + \frac{Br^4}{4}\right)$$

Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{\text{int}} = \left(\frac{Ar}{3\varepsilon_o} + \frac{Br^2}{4\varepsilon_o} \right)$.

Per i punti esterni che si trovano sulla superficie Σ_{ext} di raggio $r>R$, il flusso uscente da Σ_{ext} vale

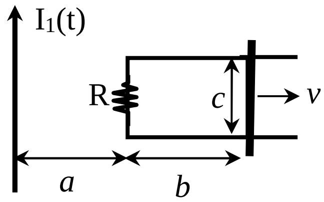
$\Phi_{\Sigma ext} = \int_{\Sigma ext} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere ancora Q_{int}/ε_o. Ma questa volta la carica contenuta è tutta la carica $Q = \int \rho dV = \int_0^R \rho \left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi \left(\frac{AR^3}{3} + \frac{BR^4}{4} \right)$.

Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo esterno $E_{ext} = \frac{AR^3}{3\varepsilon_o r^2} + \frac{BR^4}{4\varepsilon_o r^2}$.

La condizione $E_{\text{int}}\left(\frac{R}{2}\right) = E_{ext}(4R)$ comporta $\frac{A(R/2)}{3\varepsilon_o} + \frac{B(R/2)^2}{4\varepsilon_o} = \frac{AR^3}{3\varepsilon_o (4R)^2} + \frac{BR^4}{4\varepsilon_o (4R)^2}$

$A\frac{7R}{48\varepsilon_o} = -B\frac{3R^2}{64\varepsilon_o}$ da cui $B = -A\frac{7 \cdot 64}{3 \cdot 48}\frac{1}{R} =$ **- 31.1 μC/m⁴**

5. Un filo infinitamente lungo è percorso dalla corrente $I_1 = I_o * (t/\tau)$. Una spira rettangolare di lati a,b giace con il filo nel piano del foglio. Sapendo che il lato più esterno della spira viene spostato alla velocità costante ed assumendo nota la resistenza elettrica R della spira, calcolare il valore della corrente indotta dopo $t=\tau$. [Dati: τ=10ms, I_o=2mA, a=b=c=1cm, v=5m/s R=20Ω]

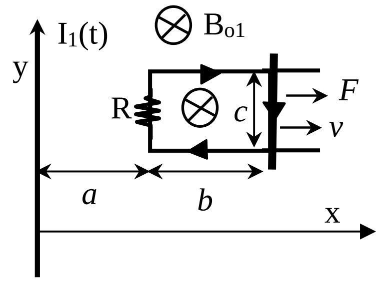


5. Il campo magnetico non uniforme generato dal filo è $B_{o1}(x,t) = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$.

Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata

(la normale alla spira $\hat{n}$ ha lo stesso verso di $\vec{B}_{o1}$) si ricava il flusso concatenato:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_{o1} \cdot \hat{n} dS = \int B_{o1} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} \int_o^c dy \int_a^{a+b(t)} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t) c}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b(t)}{a}\right).$$



la **forza elettromotrice indotta nella spira**

$$f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o c}{2\pi}\left[\frac{dI_1}{dt}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right) + I_1 \frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right)\right] = -\frac{\mu_o c}{2\pi}\left[\frac{I_0}{\tau}\ln\left(1+\frac{b(t)}{a}\right) + I_o\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{v}{a+b(t)}\right] =$$

$$f_i = -\frac{\mu_o c I_o}{2\pi\tau}\left[\ln\left(1+\frac{b+vt}{a}\right) + \frac{vt}{a+b+vt}\right]$$

La **corrente indotta** $i = -\frac{f_i}{R} = -\frac{\mu_o c I_o}{2\pi R\tau}\left[\ln\left(1+\frac{b+vt}{a}\right) + \frac{vt}{a+b+vt}\right]$ ed $i(\tau)$= **- 53 pA**

(in senso opposto a quello indicato in figura)